

Kapitel 4: Dreieckslehre

4.1 Bedeutung der Dreiecke

Durch **Triangulation** lassen sich Vielecke in Dreiecke zerlegen

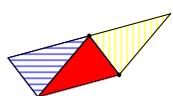
(n-Eck in $n-2$ Dreiecke)

⇒ Beweis von Sätzen mittels Sätzen über Dreiecke
(z.B. Winkelsumme, Flächeninhalt, Kongruenz)

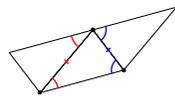
4.2 Winkelsumme im Dreieck

Die Winkelsumme im Dreieck beträgt 180° .

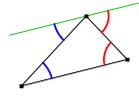
Herleitung bzw. experimentelle Begründung in der Schule:



Durch Parkettierung
experimentell



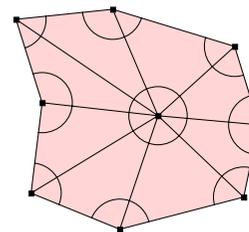
Durch
Punktspiegelung



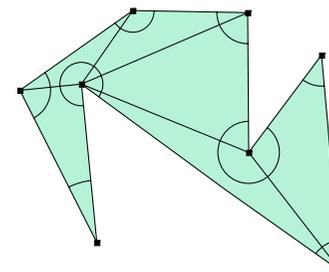
Durch Winkel an
Parallelen

Satz 4.1

Die Winkelsumme im n-Eck beträgt $(n-2) \cdot 180^\circ$.



$$n \cdot 180^\circ - 360^\circ = (n-2) \cdot 180^\circ$$



$$(n-2) \cdot 180^\circ$$

4.3 Besondere Linien und Punkte im Dreieck

Satz 4.2 (Satz vom Mittendreieck)

Verbindet man die Seitenmitten eines Dreiecks, so liegen die Seiten des entstehenden Dreiecks parallel zu Seiten des Ausgangsdreiecks und sind halb so lang.

Beweis trivial mit Hilfe der Strahlensätze (⇒ Übungen)

Beweis ohne Strahlensätze (Schule):

Ausgangsdreieck ABC ,

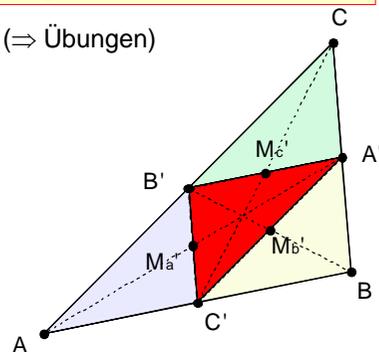
Mittendreieck $A'B'C'$.

Spiegle das Mittendreieck $A'B'C'$ an
seinen Seitenmitten M_a' , M_b' , M_c' .

⇒ ΔABC .

Bei Punktspiegelung gilt:

Bildstrecke \parallel Originalstrecke.



Hinweis: Eigentlich wird so nur bewiesen, dass man, ausgehend von $\Delta A'B'C'$ ein Dreieck ΔABC erhält, dessen Mittendreieck $\Delta A'B'C'$ ist. Es wäre zu zeigen, dass man - ausgehend von ΔABC und dessen Mittendreieck $\Delta A'B'C'$ - durch diese Spiegelung wieder zu ΔABC gelangt.

Satz 4.3 (Besondere Linien im Dreieck)

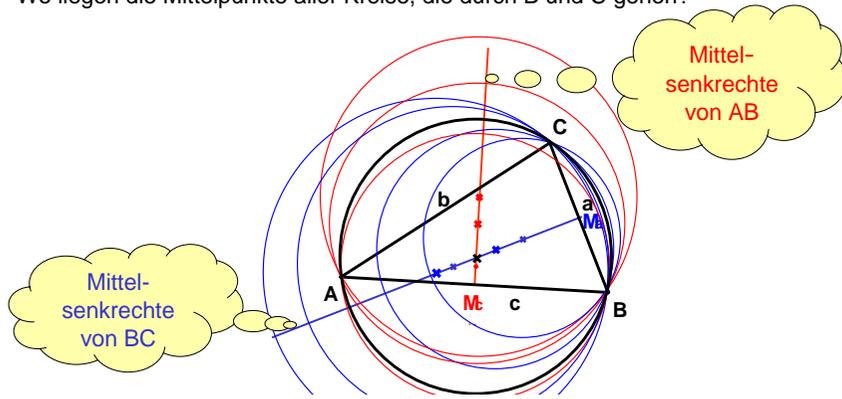
In einem Dreieck schneiden sich

- die **Mittelsenkrechten** im **Umkreismittelpunkt U**;
Dreieck spitzwinklig: U innerhalb des Dreiecks
Dreieck rechtwinklig: U auf der längsten Dreiecksseite
Dreieck stumpfwinklig: U außerhalb des Dreiecks
- die **Winkelhalbierenden** im **Inkreismittelpunkt**;
- die **Seitenhalbierenden** im **Schwerpunkt S**;
dieser teilt die Seitenhalbierenden im Verhältnis 2:1;
- die **Höhen** im **Höhenschnittpunkt**.

Umkreismittelpunkt

Wo liegen die Mittelpunkte aller Kreise, die durch A und B gehen?

Wo liegen die Mittelpunkte aller Kreise, die durch B und C gehen?

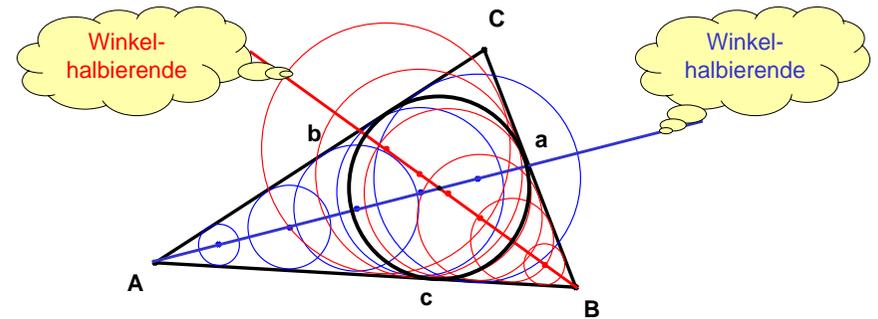


Der Mittelpunkt des Kreises, der durch alle Eckpunkte geht, ist der Schnittpunkt der Mittelsenkrechten.

Inkreismittelpunkt

Wo liegen die Mittelpunkte aller Kreise, die die Seiten b und c berühren?

Wo liegen die Mittelpunkte aller Kreise, die die Seiten a und c berühren?

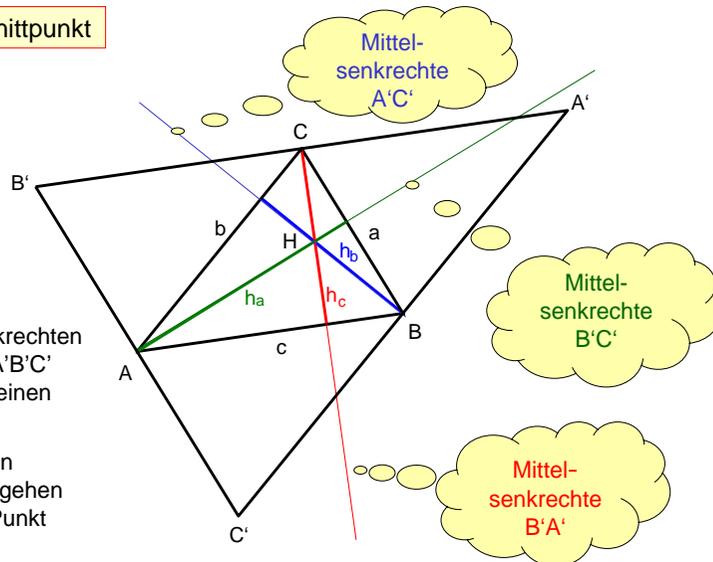


Der Mittelpunkt des Kreises, der alle Seiten berührt, ist der Schnittpunkt der Winkelhalbierenden.

Höhenschnittpunkt

Die Mittelsenkrechten von Dreieck A'B'C' gehen durch einen Punkt \Rightarrow

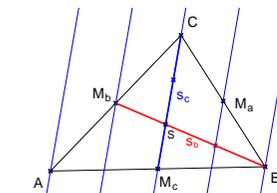
Die Höhen von Dreieck ABC gehen durch einen Punkt



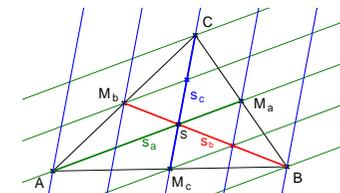
Schwerpunkt

s_a und s_b sind zwei Seitenhalbierende.

Zeichne zu s_a Parallelen durch C, M_b , M_c und B. Diese haben alle den gleichen Abstand, sie teilen daher die Seitenhalbierende s_b im Verhältnis 2:1



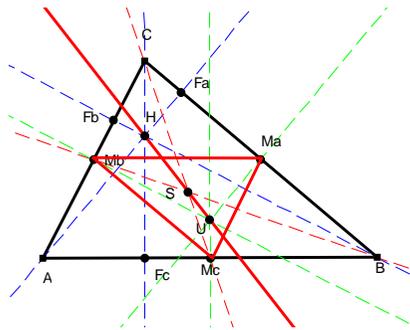
Zeichne zur Seitenhalbierenden s_c Parallelen durch A, M_b , M_a und B. Auch diese haben alle den gleichen Abstand und teilen die Seitenhalbierende s_b im Verhältnis 2:1.



Damit müssen alle drei Seitenhalbierenden durch den gleichen Punkt S auf s_b verlaufen..

Euler-Gerade

Umkreismittelpunkt U, Schwerpunkt S und Höhen-Schnittpunkt H liegen auf einer Geraden. Diese heißt Euler-Gerade.



Es ist $|\overline{SH}| = 2 \cdot |\overline{US}|$.

$\triangle ABC$ geht durch Streckung mit Zentrum S und Streckfaktor $\frac{1}{2}$ in $\triangle M_a M_b M_c$ über.

Die Höhen von $\triangle ABC$ gehen dabei in die Höhen $\triangle M_a M_b M_c$ über.

Diese sind die Mittelsenkrechten von $\triangle ABC$.

Damit geht H durch Streckung mit Zentrum S und Streckfaktor $-\frac{1}{2}$ in U über.

4.4 Kongruenzsätze

Die „Kongruenzsätze“ haben wir zu Beginn als „Axiome“ in der folgenden Form vorausgesetzt:

Stimmen zwei Dreiecke in

- den drei Seiten (**sss**),
- den zwei an eine Seite anliegenden Winkeln (**wsw**),
- zwei Seiten und dem eingeschlossenen Winkel (**sws**),
- zwei Seiten und dem der größeren Seite gegenüber liegenden Winkel (**Ssw**),

überein, dann stimmen sie in allen Maßen überein.

Wir haben in den vorangehenden Kapiteln gezeigt:

Je zwei in allen Bestimmungsstücken übereinstimmenden Dreiecke können durch genau eine Kongruenzabbildung aufeinander abgebildet werden.

Damit wird der Sachverhalt als richtiger **Kongruenzsatz** formuliert:

Stimmen zwei Dreiecke in

- den drei Seiten (**sss**),
- den zwei an eine Seite anliegenden Winkeln (**wsw**),
- zwei Seiten und dem eingeschlossenen Winkel (**sws**),
- zwei Seiten und dem der größeren Seite gegenüber liegenden Winkel (**Ssw**),

überein, dann können sie durch eine Kongruenzabbildung aufeinander abgebildet werden.

4.5 Ähnliche Figuren und Ähnlichkeitssätze

Definition 4.1

Zwei Figuren heißen ähnlich, wenn sie

- in den Längenverhältnissen aller einander entsprechenden Linien und
- in allen einander entsprechenden Winkeln

übereinstimmen.

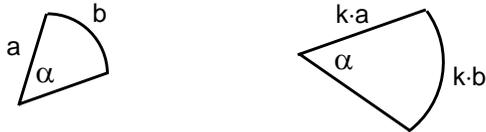
Bemerkung:

Wir werden später (nach der Behandlung von zentrischen Streckungen) Ähnlichkeit mit Hilfe von Ähnlichkeitsabbildungen exakter definieren.

Bemerkung:

Wir betrachten auch Figuren, die nicht nur durch Strecken begrenzt werden. Die Gleichheit von Längenverhältnissen gilt dann nicht nur für Längen von Strecken sondern auch für die Längen nicht geradliniger Linien (z.B. Kreisbögen usw.)

Beispiel: Kreissektoren



Um die Ähnlichkeit von Dreiecken nachzuweisen benutzt man häufig die **Ähnlichkeitssätze für Dreiecke**.

Man gewinnt sie unmittelbar aus den entsprechenden **Kongruenzsätzen für Dreiecke**.

| Ähnlichkeitssatz | entsprechender Kongruenzsatz |
|---|--|
| Zwei Dreiecke sind zueinander ähnlich , wenn sie übereinstimmen in | Zwei Dreiecke sind kongruent , wenn sie übereinstimmen in |
| den Verhältnissen der drei Seiten | den drei Seiten (sss) |
| oder | oder |
| zwei Winkeln | einer Seite und den anliegenden Winkeln (wsw) |
| oder | oder |
| den Verhältnissen von zwei Seiten und dem eingeschlossenen Winkel | zwei Seiten und dem eingeschlossenen Winkel (sws) |
| oder | oder |
| den Verhältnissen von zwei Seiten und dem der größeren Seite gegenüber liegenden Winkel | zwei Seiten und dem der größeren Seite gegenüber liegenden Winkel (Ssw) |

4.6 Geometrische Orte

Gegeben: Dreieck ABC. Die Seite AB wird festgehalten.

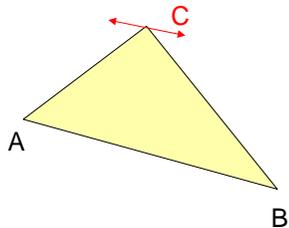
C wird so bewegt, dass

- der Flächeninhalt,
- der Umfang,
- der Winkel γ



unverändert bleibt.

Auf welcher Linie läuft C? An welchem Ort befindet sich C?



Man nennt diese Kurven (Punktmengen) den „**geometrischen Ort der Punkte mit einer gewissen Eigenschaft**“.

Aufgabe

Definieren Sie die folgenden Kurven jeweils als „**geometrischen Ort**“:

Der Kreis mit Mittelpunkt M und Radius r.

Die Mittelsenkrechte der Strecke AB.

Die Winkelhalbierende des Winkels $\angle h_f, h_g$ mit den Halbgeraden h_f, h_g als Schenkel.

Die Seitenhalbierende s_c zur Seite c im Dreieck ABC.

Welche Definition einer Ellipse als Ortslinie ergibt sich aus der 2. Eigenschaft der Beispiele der vorangehenden Seite?

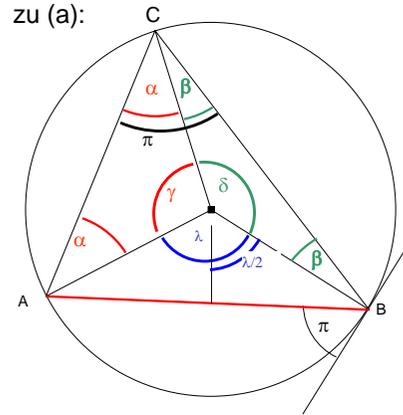
4.7 Winkelsätze: Umfangwinkelsatz

Satz 4.5

- a) Die Umfangswinkel (Peripherie-Winkel) auf einem Kreisbogen sind alle gleich groß (und $\frac{1}{2}$ so groß wie der zugehörnde Mittelpunktswinkel)
- b) Die Scheitel C aller Dreiecke ABC mit gleichem Winkel π bei C über einer Strecke \overline{AB} liegen auf einem Kreisbogen, der durch A und B verläuft.
- Kurz:
Der geometrische Ort aller Punkte C, für die die Strecke \overline{AB} unter dem gleichen Winkel π erscheint, ist ein Kreisbogen durch die Punkte A und B.
- Sonderfall: Satz des Thales**
- c) Der Winkel zwischen der Sehne \overline{AB} und der Tangente in B (Sehnen-Tangenten-Winkel) ist ebenso groß wie der Peripheriewinkel π (und $\frac{1}{2}$ so groß wie der zugehörnde Mittelpunktswinkel).

4.7 Winkelsätze: Umfangwinkelsatz

zu (a):



$$\begin{aligned} \text{Umfangswinkel} &= \pi = \alpha + \beta \\ \text{Mittelpunktswinkel} &= \lambda \\ 2\alpha + \gamma &= 180^\circ \\ 2\beta + \delta &= 180^\circ \\ \lambda &= 360^\circ - \gamma - \delta \\ &= 360^\circ - (180^\circ - 2\alpha) - (180^\circ - 2\beta) \\ &= 2\alpha + 2\beta \\ \text{Umfangswinkel} &= \frac{1}{2} \lambda \\ &\text{konstant!} \end{aligned}$$

Andere Lagen des Punktes C?

Zu (b)

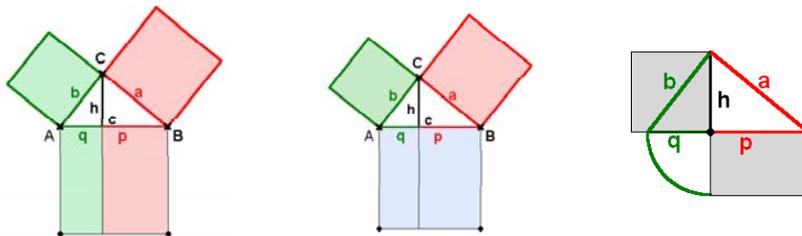
Sei K der Kreis über \overline{AB} zum Winkel π aus (a).
Für Punkte C' außerhalb des Kreises K ist der Winkel bei C' kleiner als π ,
für C' innerhalb von K größer als π .
Begründung?

4.8 Flächensätze: Satzgruppe des Pythagoras

Satz 4.6

Im rechtwinkligen Dreieck

- ist ein Kathetenquadrat so groß wie das Rechteck aus Hypotenuse und anliegendem Hypotenusenabschnitt,
- ist das Hypotenusenquadrat so groß wie die Summe der Kathetenquadrate,
- ist das Quadrat über der Höhe so groß wie das Rechteck aus den beiden Hypotenusenabschnitten .

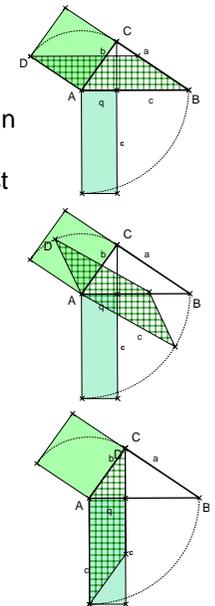


Der klassische Beweis des Kathetensatzes

Das Quadrat über der Kathete wird durch Scherung in ein flächengleiches Parallelogramm überführt. Grundseite des Parallelogramms ist \overline{DA} , die Höhe ist ebenso lang wie die Seite \overline{AC} .

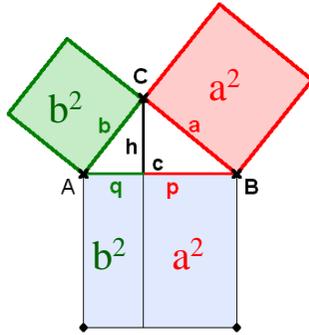
Das Parallelogramm wird um 90° um die Ecke A gedreht.

Das Parallelogramm kann wieder durch Scherung in das flächengleiche Rechteck mit den Seitenlängen q und c überführt werden.



Der klassische Beweis des Satzes des Pythagoras aus dem Kathetensatz

Der Satz des Pythagoras folgt unmittelbar aus der Anwendung des Kathetensatzes auf die beiden Kathetenquadrate.



Beweis Pythagoras

Beweis des Höhensatzes aus dem Satz des Pythagoras

$$h^2 = a^2 - p^2$$

$$h^2 = b^2 - q^2$$

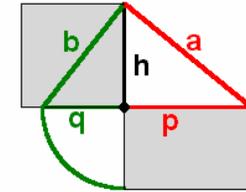
$$2h^2 = a^2 + b^2 - p^2 - q^2$$

$$= (p + q)^2 - p^2 - q^2$$

$$= p^2 + q^2 + 2pq - p^2 - q^2$$

$$= 2pq$$

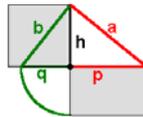
$$h^2 = pq$$



Beweis Höhensatz

Anwendung des Höhensatzes:

Umwandlung eines Rechtecks in ein flächengleiches Quadrat mit Zirkel und Lineal.



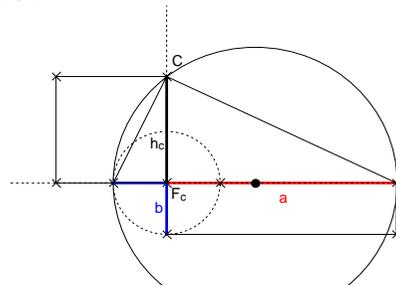
Aufgabe

Gegeben ist ein beliebiges Rechteck mit den Seitenlängen a und b.
Gesucht ist ein flächengleiches Quadrat.

Zur Strecke mit der Länge a+b wird der Thaleskreis K konstruiert und das Lot h in F_c errichtet.

Der Schnittpunkt von K mit H ist die Ecke C eines rechtwinkligen Dreiecks mit der Höhe h_c .

Es gilt $h_c^2 = ab$ bzw. $h_c = \sqrt{ab}$



Anwendung Höhensatz