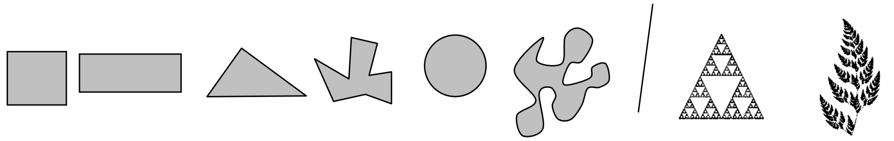
# 7 Der Flächeninhalt

Der Flächeninhalt einer Figur soll etwas über deren Größe aussagen. Intuitiv scheint der Flächeninhaltsbegriff „irgendwie klar“ zu sein. Er wird schon ab der Grundschule durch Auslegen verschiedener einfacher Figuren mit Plättchen vorbereitet und gegen einen anderen Begriff von Größe, den Umfang einer Figur, abgegrenzt. So bildet sich eine Vorstellung, was es bedeutet, dass zwei Figuren den gleichen Flächeninhalt haben. In der Geometrie als reiner Mathematik können Figuren wachsender Kompliziertheit betrachtet werden, denen man ab einer gewissen Stufe vielleicht gar keinen Flächeninhalt im intuitiven Sinne mehr zuordnen möchte. Es gibt daher eine Folge immer mehr verfeinerter Definitionen des Flächeninhaltsbegriffs, die auch den Messprozess festlegen.



Welchen Figuren sind Sie bereit, einen „Flächeninhalt“ zuzusprechen? Wie sollte der definiert und gemessen werden?

Den „Flächeninhalt zu bestimmen“ bedeutet in der reinen Mathematik, möglichst vielen Figuren F der Ebene eine (Maß-)Zahl A(F) zuzuordnen. Diese Zuordnung sollte alle Eigenschaften besitzen, die man vom intuitiven Flächeninhaltsbegriff selbstverständlich erwartet:

| | |
|---|---|
| (1) $A(F) \geq 0$ | für alle Figuren F, |
| (2) $A(F_1 \cup F_2) = A(F_1) + A(F_2)$ | wenn $F_1 \cap F_2 = \varnothing$ , ($F_1$ , $F_2$ haben keine gemeinsamen Punkte), |
| (3) $A(F') = A(F)$ | wenn F' kongruent zu F ist, |
| (4) $A(Q_e) = 1$ | für ein (beliebig) ausgezeichnetes „Einheitsquadrat“ $Q_e$ . |

Im Folgenden soll dieser Prozess für die in der Schulmathematik relevanten Figuren genauer betrachtet und in einigen Beispielen angewandt werden. Statt den Flächeninhalt explizit zu definieren beschreibt man meist nur den Messprozess.

## 7.1 Flächeninhalt als Größe

Im *Alltagsgebrauch* wird man Figuren mit einem Flächeninhalt von 0 (z.B. einzelne Punkte, Strecken) nicht als „Fläche“ akzeptieren und ihnen auch keinen Flächeninhalt zuordnen.
Lässt man diese Flächen weg, dann bilden die Flächeninhalte einen so genannten „Größenbereich“ (→ Vorlesung über Größenbereiche).

In einem Größenbereich G sind Addition + und Kleiner-Relation < erklärt:

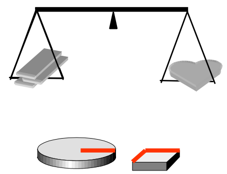
| | |
|---|---|
| (1) $a + b = b + a$ | Kommutativgesetz |
| (2) $(a + b) + c = a + (b + c)$ | Assoziativgesetz |
| (3) entweder $a < b$ oder $b < a$ oder $a = b$ | Trichotomie |
| (4) $a < b \Leftrightarrow$ es gibt ein $c \in G$ mit $a + c = b$ | eingeschränktes Lösbarkeitsgesetz |

## 7.2 Der Messprozess

Bei der Entwicklung der Vorstellung des Flächeninhaltsbegriffs spielt sicher das physikalische Modell einer aus homogenem Material gleicher Dicke ausgeschnittenen „Figur“ eine Rolle. Dabei haben Figuren gleichen Flächeninhalt wenn sie gleiches Gewicht haben. Den Flächeninhalt verschiedener Figuren kann man in diesem Sinne experimentell unmittelbar vergleichen, indem man die Figuren



herstellt aus geeignetem Material und ihr Gewicht vergleicht. Durch Vergleichen des Gewichts einer Figur mit dem mehrerer Einheitsquadrate kann man Figuren Flächenmaßzahlen zuordnen.
Die Verbindung des Flächen-Messprozesses mit einem physikalischen Wägeprozess lässt sich nicht in die Mathematik übertragen. Das Verfahren findet seine Grenze außerdem bei „Figuren“, die nicht herstellbar sind. Zur Gewinnung von Flächeninhaltsformeln ist es auch nur bedingt einsetzbar, da man durch Wägung zunächst nur Zahlenwerte erhält, die oft die Abhängigkeit von bestimmenden Größen nicht erkennen lassen.



**Mathematische Flächeninhaltsbegriffe**:

- Auslegen einer Fläche mit zueinander deckungsgleichen Figuren und Anzahlbestimmung (⇒ z.B. Inhaltsformel für Rechtecke, für die Schule bestens geeignet und gebräuchlich)
  Grenzen des Messprozesses durch Auslegen:
  - Theoretisch problematisch bei Rechtecken mit Seiten, die zu denen des Einheitsquadrates inkommensurabel sind.
  - Vergleich beliebiger Dreiecke.
  - krummlinig begrenzte Figuren.
- Begriffe „Zerlegungsgleichheit“ und “ Ergänzungsgleichheit“ von Figuren. Verwendbar für geradlinig begrenzte Figuren (Polygone).
- Grenzprozesse durch Annäherung komplizierter Flächen durch einfachere (⇒ z.B. Kreisfläche). Mathematisch einwandfreies Verfahren, aber in der Schule nur propädeutisch möglich. Strebt man dagegen nicht die Entwicklung eines exakten Flächeninhalts*begriffes* an, kann das Verfahren zur näherungsweisen Bestimmung von Flächeninhalten in der Schule sehr gut verwandt werden.

### 7.2.1 Zerlegungsgleich - ergänzungsgleich

(Vergleich von Flächeninhalten durch Zerlegen und Umordnen)

**Definition 7.1**
**Zwei Figuren heißen zerlegungsgleich wenn sie sich in paarweise kongruente Figuren zerlegen lassen.**

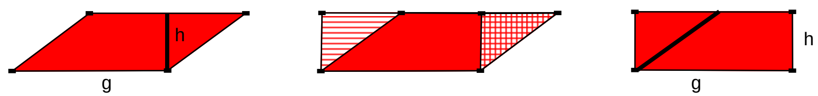
**Definition 7.2**
**Zwei Figuren heißen ergänzungsgleich wenn sie durch Ergänzung mit kongruenten Figuren zu kongruenten (i.A. zerlegungsgleichen) Figuren ergänzt werden können.**

Intuitiv scheint klar:

- **Zerlegungsgleiche Figuren sind inhaltsgleich**
- **Ergänzungsgleiche Figuren sind inhaltsgleich**

**Beispiele:**

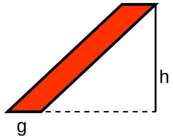
**Flächeninhalt des Parallelogramms**




Das Parallelogramm und das Rechteck sind zerlegungsgleich. Daraus erhält man die Flächeninhaltsformel für das Parallelogramm: $A = g \cdot h$

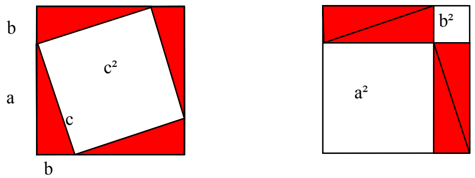
**Aufgabe**

Gilt dies auch für das nebenstehende Parallelogramm?
Ist dieses auch zerlegungsgleich zu einem Rechteck mit den Seiten g und h?




**Ein "Pythagoras-Legebeweis"**

Quadrat mit der
Seitenlänge a+b




Die weißen Flächen sind ergänzungsgleich, d.h. sie können durch Ergänzung mit kongruenten Figuren (hier den Dreiecken) zu kongruenten (i.A. zerlegungsgleichen) Figuren ergänzt werden. Dieser Beweis findet sich häufig in Schulbüchern, er ist einfach und einleuchtend, zeigt aber die „Pythagoras-Figur“ nicht gut, das rechtwinklige Dreieck spielt eher eine untergeordnete Rolle.
Die linke Skizze alleine kann auch benutzt werden, um den Satz über das Problem einer

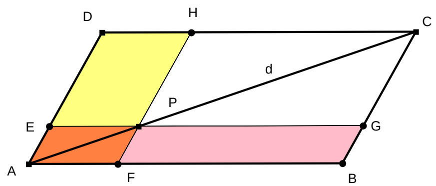
Flächenberechnung algebraisch herzuleiten: $c^2 = (a+b)^2 - 4\cdot\frac{1}{2}ab = a^2+2ab+b^2-2ab = a^2+b^2$

**Satz vom Ergänzungsparallelogramm**

**1. Der Satz**

Gegeben ist das Parallelogramm ABCD und ein Punkt P auf der Diagonalen d=AC.

Durch P sind Parallelen zu den Seiten des Parallelogramms gezeichnet. Dadurch entstehen zwei Parallelogramme EPHD (gelb) und FBGP (hellrot).

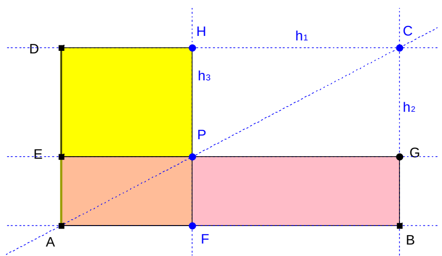



Zeigen Sie, dass diese Parallelogramme den gleichen Flächeninhalt besitzen.
Zeigen Sie, dass auch die Parallelogramme AFHD und ABGE den gleichen Flächeninhalt besitzen.

Beachten Sie:
Dieser Satz gibt zunächst keinen Hinweis darauf, wie man die ***Zerlegungsgleichheit*** der beiden Parallelogramme nachweisen könnte!

**2. Anwendung**

Gegeben ist ein Rechteck ABGE (hellrot).
Es soll ein dazu flächengleiches Rechteck mit einer vorgegebenen Seite $\overline{AD}$ konstruiert werden.




Konstruktion:

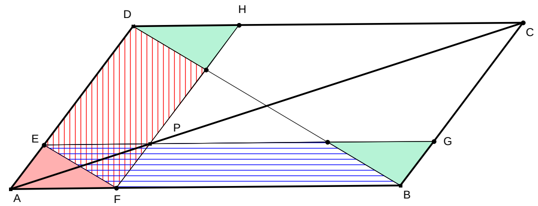
$h_1$ Parallele durch zu AB durch D,



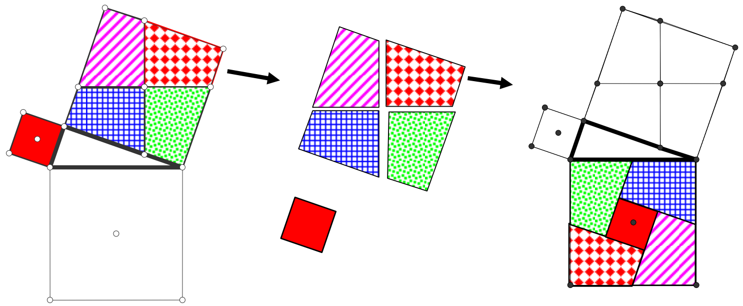
$h_2$ Parallele durch zu AD durch B,
C Schnittpunkt von $h_1$ und $h_2$,
P Schnittpunkt von AC mit GE,
$h_3$ Parallele zu AD durch P,
H Schnittpunkt von $h_3$ mit DC.
F Schnittpunkt von $h_3$ mit AB.

AFHD ist das gesuchte Rechteck.

Nebenstehende Skizze gibt einen Hinweis, wie man den Satz vom Ergänzungsparallelogramm auch mit Hilfe der Zerlegungsgleichheit von Figuren nachweisen kann. Man benötigt dabei, dass Parallelogramme mit gleicher Grundseite und Höhe zerlegungsgleich sind (s.o. und Übungsaufgaben).



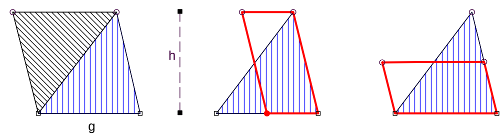

**Ein "Pythagoras-Zerlegungsbeweis" , „Schaufelradbeweis“**



Auch dieser „Beweis“ wird in Schulbüchern oft angeboten, da er einen handlungsorientierten Zugang erlaubt und die „Pythagoras-Figur“ gut sichtbar wird. Oft wird die Ausgangsfigur mit der Zerlegung der Kathetenquadrate vorgegeben und die Beweisaufgabe als „Puzzleproblem“ gestellt. Um daraus einen korrekten Beweis zu machen, muss nachgewiesen werden, dass die Teile, in die die Kathetenquadrate zerlegt wurden, das Hypotenusenquadrat lückenlos und überlappungsfrei überdecken.

**Aufgabe**: Führen Sie den korrekten Beweis aus.

**Dreiecksformeln und ihre geometrische Deutung**

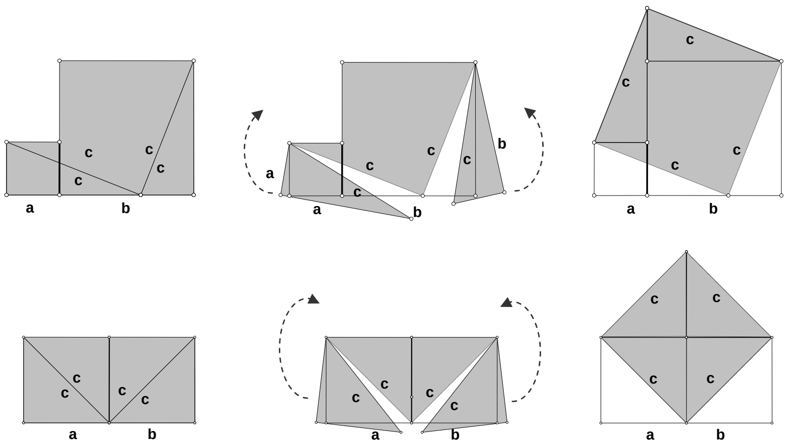



$A = \frac{gh}{2}$ $A = \frac{g}{2}h$ $A = g\frac{h}{2}$

Die beiden letzten Herleitungen benutzen wieder den Begriff der Zerlegungsgleichheit, um zu zeigen, dass jedes Dreieck flächengleich zu einem Parallelogramm ist.

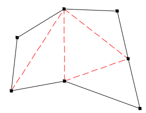
**Noch ein Zerlegungsbeweis zum Satz des Pythagoras.**

Die Konstruktion kann wieder mit Papier oder Folien von Schülern nachvollzogen werden.
Sind die beiden Ausgangsquadrate gleich groß (d.h. a=b), dann ist diese Figur gerade die viel einfachere Figur zur Verdopplung eines Quadrates aus Platos Dialog „Menon“, mit deren Hilfe eventuell die Wurzel aus 2 eingeführt werden kann.



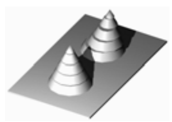

### 7.2.2 Flächeninhalt von n-Ecken

Durch „Triangulation“ kann die Berechnung von Flächeninhalten beliebiger n-Ecke auf die von Dreiecken zurück geführt werden.



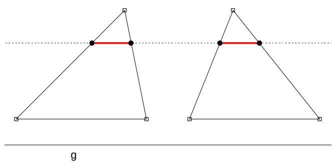
Grenzen des Zerlegungs-Verfahrens: Nicht geradlinig begrenzte Flächen.

### 7.2.3 Das Prinzip von Cavalieri (1598 – 1647)



„Sind zwei Körper gleich hoch und ist in jeder Höhe die Schnittfläche bei beiden Körpern gleich groß, so haben die Körper dasselbe Volumen“

**„Cavalieri in der Ebene“:**
Kann man eine Gerade g so zeichnen, dass jede Parallele zu dieser Geraden aus zwei Flächen stets zueinander gleichlange Strecken ausschneidet, so haben die Flächen denselben Inhalt**.**




Dieses Prinzip wird in der Integralrechnung begründet und erfordert Überlegungen mit Grenzprozessen. Es kann aber anschaulich leicht plausibel gemacht werden, wenn man die Figuren auf gleicher Schnitthöhe durch schmale kongruente Rechtecke überdeckt.

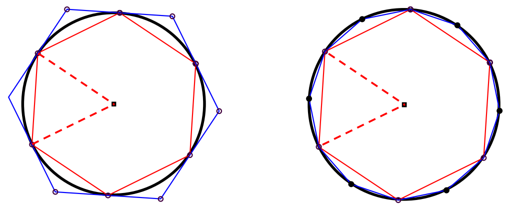


### 7.2.4 Grenzprozesse

**Beispiel: Flächeninhalt des Kreises**

Um den Flächeninhalt von Kreisen zu berechnen, werden diese durch einbeschriebene und umbeschriebene regelmäßige n-Ecke angenähert; für $n \to \infty$ nähern sich deren Flächeninhalte von unten bzw. oben einem gemeinsamen Wert an. Diesen Wert **definiert** man als den Flächeninhalt des Kreises.

Wir sagen:
„Intervallschachtelung“ liefert den Flächeninhalt des Kreises.



Ein- und umbeschriebenes Sechseck — Einbeschriebenes Sechseck und Zwölfeck

Dasselbe Verfahren verwendet man, um den Umfang von Kreisen zu definieren und zu berechnen. Meist bestimmt man *zuerst* den Umfang von Kreisen und definiert in diesem Zusammenhang die Kreiszahl π als Proportionalitätsfaktor zwischen Durchmesser und Umfang und führt dann die Berechnung des Flächeninhalts auf die Umfangsberechnung zurück. Dieses Verfahren soll hier kurz dargestellt werden.

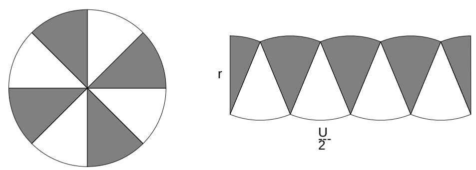
**Definition der Kreiszahl π**

**Da alle Kreise zu einander ähnlich sind, ist das Verhältnis von Umfang zu Durchmesser konstant. Dieses Verhältnis wird als Zahl π definiert.**

Man hätte die Zahl π auch über die Berechnung des Flächeninhaltes definieren können. Es scheint aber leichter einzusehen, dass für alle Kreise das Verhältnis Umfang/Durchmesser eine Konstante ist als das Verhältnis Flächeninhalt/Radius². Beides ist richtig, da alle Kreise zueinander ähnlich sind.

Zunächst ist keineswegs klar, dass die gleiche Zahl π sowohl in der Umfangsberechnung als auch in der Flächeninhaltsberechnung von Kreisen auftritt. Wegen der Ähnlichkeit aller Kreise gilt $\frac{U}{d}$ konstant und $\frac{A}{r^2}$ konstant. Genauso ist aber auch $\frac{A}{d^2}$ konstant. Es ist also keineswegs klar, dass $\frac{A}{r^2} = \pi$ ist oder diese Konstante überhaupt in einfacher Weis mit π zusammen hängt!

Um zu zeigen, dass $A = \pi r^2$ ist bzw. um die Berechnung des Flächeninhaltes direkt auf die Berechnung des Umfangs zurückführen, stellt man einen Zusammenhang von Umfang eines Kreises mit seinem Flächeninhalt her (nebenstehende Skizze).
Eine immer feinere Unterteilung des Kreises gibt den Zusammenhang $A = \frac{1}{2}\,U \cdot r = \frac{1}{2} \cdot 2\pi r \cdot r = \pi r^2$.

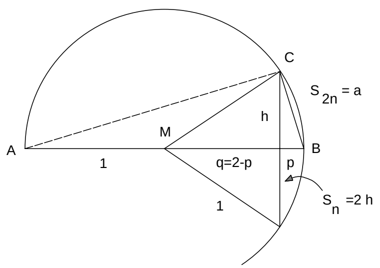



Dabei ist π die Konstante aus der Umfangsberechnung.
Exakt ist hier wieder ein Grenzprozess durchzuführen.

**Bestimmung von π durch ein Näherungsverfahren zur Berechnung des Kreisumfangs**

Der Radius des Kreises soll 1 Längeneinheit (LE) betragen. Man berechnet, wie sich die Seitenlänge $S_{2n}$ des einbeschriebenen regelmäßigen 2n-Ecks aus der Seitenlänge $S_n$ des n-Ecks ergibt.
Die Seitenlänge des einbeschriebenen 6-Ecks ist 1 LE. Damit kann man die Seitenlänge des 12-, 24, 48-Ecks berechnen. Diese Formeln können mit dem Taschenrechner oder mit Hilfe eines Tabellenkalkulationsprogramms ausgewertet werden, um immer genauere Werte für π zu erhalten.

Skizze




Es ist dann $U_n = n\cdot S_n$ , $\pi \approx \frac{U_n}{2} = \frac{n}{2}S_n$

ΔABC ist rechtwinklig (Thalessatz)

Höhensatz für ΔABC: $h^2 = (2-p)p$ (1)

Kathetensatz für ΔABC: $a^2 = 2p$ (2)

(1) nach p (<1) aufgelöst: $p = 1 - \sqrt{1-h^2}$ (3)

(3) in (2) eingesetzt: $a = \sqrt{2 - 2\sqrt{1-h^2}}$

$= \sqrt{2 - \sqrt{4-4h^2}}$

Damit ist

$$\boxed{S_{2n} = \sqrt{2-\sqrt{4-S_n^{\,2}}} = \frac{S_n}{\sqrt{2+\sqrt{4-S_n^{\,2}}}}}$$

Verwendet man in dieser Formel den 1.Term, dann erhält man zunächst immer bessere Annäherungen an π, ab dem 25. Schritt werden die Näherungen aber wieder schlechter und nach Schritt 27 liefert Excel sogar den Wert 0 für π. Der Grund liegt in einer „Subtraktionskatastrophe" beim Runden. Der äquivalente (nachrechnen!) 2.Term ist dagegen „stabil".

Die Tabelle:

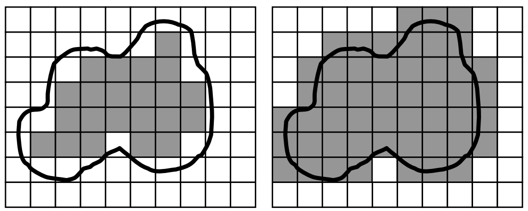
| | A | B | C | D |
|---|---|---|---|---|
| 1 | n | Sn | Un | Un/2 |
| 2 | 6 | 1,000000 | 6,000000 | 3,000000 |
| 3 | 12 | 0,517638 | 6,211657 | 3,105829 |
| 4 | 24 | 0,261052 | 6,265257 | 3,132629 |
| 5 | 48 | 0,130806 | 6,278700 | 3,139350 |
| 6 | 96 | 0,065438 | 6,282064 | 3,141032 |
| 7 | 192 | 0,032723 | 6,282905 | 3,141452 |
| 8 | 384 | 0,016362 | 6,283115 | 3,141558 |
| 9 | 768 | 0,008181 | 6,283168 | 3,141584 |
| 10 | 1536 | 0,004091 | 6,283181 | 3,141590 |
| 11 | 3072 | 0,002045 | 6,283184 | 3,141592 |

Die eingegebenen Formeln (1.Term):

| | A | B | C | D |
|---|---|---|---|---|
| 1 | n | Sn | Un | Un/2 |
| 2 | 6 | 1 | =(A2*B2) | =(C2/2) |
| 3 | =(A2*2) | =(WURZEL(2-WURZEL(4-B2*B2))) | =(A3*B3) | =(C3/2) |
| 4 | =(A3*2) | =(WURZEL(2-WURZEL(4-B3*B3))) | =(A4*B4) | =(C4/2) |
| 5 | =(A4*2) | =(WURZEL(2-WURZEL(4-B4*B4))) | =(A5*B5) | =(C5/2) |
| 6 | =(A5*2) | =(WURZEL(2-WURZEL(4-B5*B5))) | =(A6*B6) | =(C6/2) |
| 7 | =(A6*2) | =(WURZEL(2-WURZEL(4-B6*B6))) | =(A7*B7) | =(C7/2) |
| 8 | =(A7*2) | =(WURZEL(2-WURZEL(4-B7*B7))) | =(A8*B8) | =(C8/2) |
| 9 | =(A8*2) | =(WURZEL(2-WURZEL(4-B8*B8))) | =(A9*B9) | =(C9/2) |
| 10 | =(A9*2) | =(WURZEL(2-WURZEL(4-B9*B9))) | =(A10*B10) | =(C10/2) |
| 11 | =(A10*2) | =(WURZEL(2-WURZEL(4-B10*B10))) | =(A11*B11) | =(C11/2) |

## Allgemeines Verfahren zur Definition und Berechnung des Flächeninhaltes

Für beliebige Figuren F kann man den Flächeninhalt folgendermaßen definieren:



- Man legt über die Figur F ein Quadratgitternetz mit Maschenbreite $\frac{1}{n}$ und berechnet den Flächeninhalt $I_n$ aller Quadrate, die ganz innerhalb der Figur liegen und den Flächeninhalt $U_n$ aller Quadrate, die mindestens einen Punkt mit der Figur gemeinsam haben (die Figur überdecken).
- Die Folge $I_n$ wächst und die Folge $U_n$ fällt offensichtlich, wenn n immer größere Werte annimmt. Es ist stets $I_n \le U_n$.



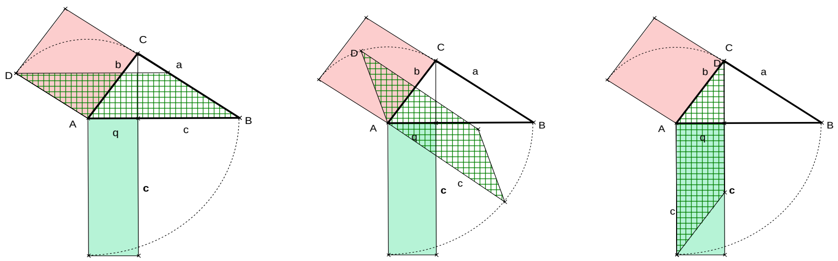
- Wenn $I_n$ und $U_n$ sich für $n \to \infty$ einer *gemeinsamen* Zahl A annähern, dann nennt man A den Flächeninhalt von F.
  $I_n$ und $U_n$ definieren A dann durch *Intervallschachtelung*.

Diese Idee einer allgemeinen Definition des Flächeninhalts kann noch verfeinert werden, um auch für sehr komplizierte Figuren einen Flächeninhalt zu erklären.

Die skizzierte Methode des Kästchen-Zählens zeigt auch, wie man für krummlinig begrenzte Figuren einen Näherungswert für den Flächeninhalt bestimmen kann.

### 7.3 Die Scherung – eine flächentreue Abbildung

Wir betrachten den durch die folgenden Abbildungen gegebenen Beweis zum Kathetensatz:



Mit Hilfe der Formel für den Flächeninhalt des Parallelogramms sieht man leicht, dass das Kathetenquadrat, das karierte Parallelogramm und das Rechteck aus Hypotenuse und Kathetenabschnitt flächengleich sind.

**Aufgabe:**
Führen Sie den Beweis exakt aus.

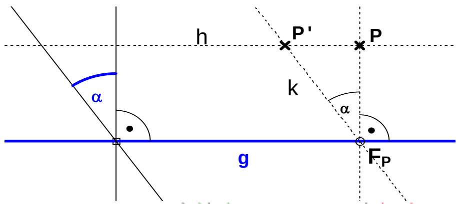
Dieser Beweis zum Kathetensatz legt die folgende Definition einer Abbildung der Ebene nahe:

**Definition Scherung**

Gegeben sind
- eine Gerade g , die Scherungsgerade,
- ein Winkel α mit $-90° < \alpha < 90°$ , der Scherungswinkel.

Die Abbildungsvorschrift:
$P \in g$: $P' = P$
$P \notin g$: $\angle(P', F_P, P) = \alpha$ , wobei $F_P$ der Fußpunkt des Lotes von P auf g ist.

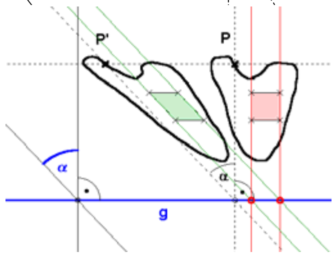
Konstruktion des Bildpunktes zu einem Punkt P:



Parallele h durch P zu g,
Lot von P auf g mit Fußpunkt $F_P$,
Gerade k unter dem Winkel α an $F_P P$ im Gegenuhrzeigersinn abtragen,
P' ist der Schnittpunkt von h und k.

**Eigenschaften der Scherung:**

- Fixpunktgerade g,
- Fixgeraden sind alle Parallelen zu g,
- geradentreu,
- nicht längentreu, aber Strecken parallel zu g behalten ihre Länge,
- nicht winkeltreu,
- **flächeninhaltstreu**.

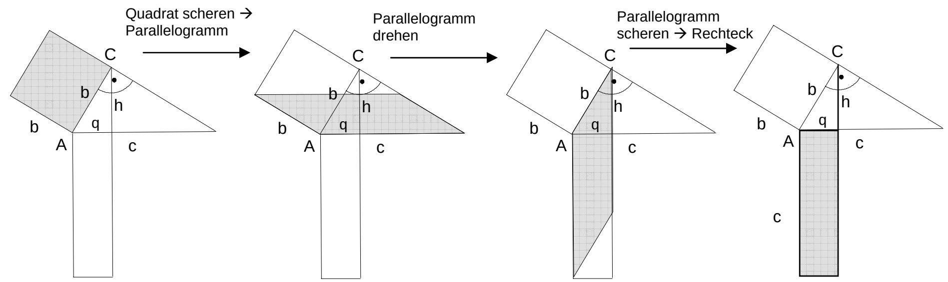




Begründung der Flächeninhaltstreue:

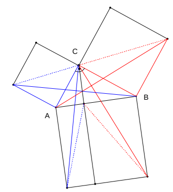
Der Flächeninhalt einer beliebigen Figur ergibt sich als Grenzwert von Quadraten mit immer kleineren Seitenlängen.
Diese Quadrate können so gewählt werden, dass 2 ihrer Seiten parallel zu g sind. Der Flächeninhalt solcher Quadrate bleibt bei der Scherung erhalten.

Die Tatsache, dass der Flächeninhalt bei Scherungen erhalten bleibt, macht man sich bei vielen Beweisen zu Nutze. Der Beweis des Kathetensatzes zu Beginn ist ein bekanntes Beispiel, bei dem zwei Scherungen und eine Drehung hinter einander ausgeführt werden.

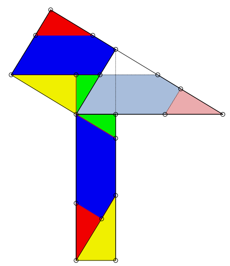



**Aufgabe**

Führen Sie den „Tänzerinnen-Beweis“ mit Hilfe von Scherungen durch.



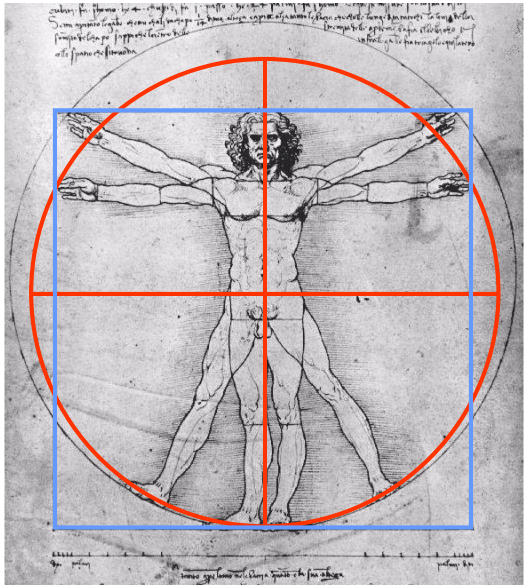
Die folgende Skizze zeigt, wie man aus dem Scherungsbeweis für den Kathetensatz zusammen mit früheren Überlegungen einen Zerlegungsbeweis gewinnen kann, der sich wieder als „Puzzlebeweis“ umsetzen lässt.



### 7.4 Einige historische Bemerkungen

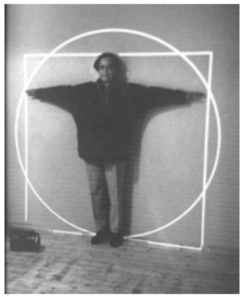
**Quadratur des Kreises**
Ein altes griechisches Problem

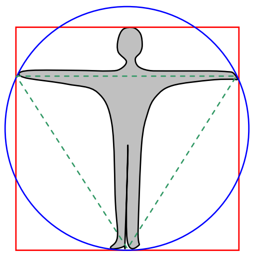
Gesucht ist ein Verfahren, nur **mit Zirkel und Lineal** zu einem **Kreis** mit gegebenem Radius ein **flächengleiches Quadrat** zu konstruieren.



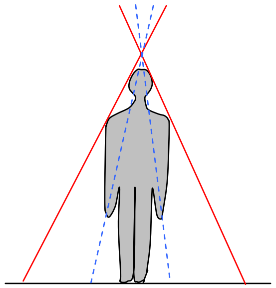
Während es nicht allzu schwierig ist zu zeigen, dass man jedes Vieleck mit Zirkel und Lineal in ein flächengleiches Quadrat verwandeln kann, ist der Beweis für die Unmöglichkeit der „Quadratur des Kreises" erst um 1870 gelungen (F.Lindemann).

Auch Leonardo da Vinci hat sich mit diesem Problem befasst. Die nebenstehende Abbildung zeigt seine bekannte Studie zu den Längenverhältnissen am „idealen" menschlichen Körper. Manche Autoren vermuten, dass Leonardo hier auch das Quadraturproblem implizit dargestellt hat: Der in Leonardos Darstellung fehlende Kreis durch die Fingerspitzen der waagerecht ausgestreckten Arme und durch den zentralen großen Zeh hat nahezu den gleichen Flächeninhalt wie das Quadrat, das durch die Körperhöhe und die Breite der ausgestreckten Arme bestimmt wird.
Auf der ersten „Phänomena" 1984 in Zürich wurde gar in einem Exponat von einem – wohl esoterischen – Autor die kühne Behauptung aufgestellt: Der Mensch ist die Lösung des Unlösbaren!

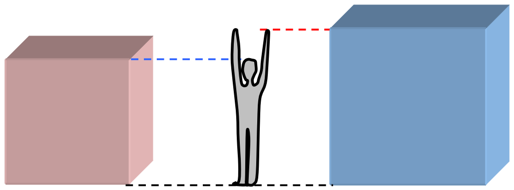




Quadratur des Kreises



Winkeldrittelung



Würfelverdoppelung
(Delisches Problem)



**Flächeninhalt von Polygonen mit Zirkel und Lineal**

**Problem 1**

Kann man ein beliebiges Vieleck (Polygon) mit Zirkel und Lineal alleine umwandeln

- in flächeninhaltsgleiches Rechteck, dessen eine Seite eine Einheitsstrecke ist,
- in ein flächeninhaltsgleiches Quadrat?

**Problem 2**

Kann man diese Umwandlung auch alleine durch Zerschneiden und Zusammenlegen erreichen?

Kann man Teil 1 von Problem 1 lösen, dann ist Teil 2 sofort mit Hilfe des Kathetensatzes oder des Höhensatzes gelöst.

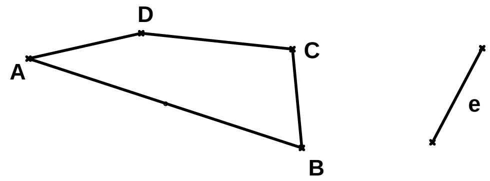
Werden diese Fragen positiv beantwortet, dann kann man alleine mit Hilfe von Zirkel und Lineal bzw. durch Zerschneiden den Flächeninhalt beliebiger Polygone vergleichen:

Entweder

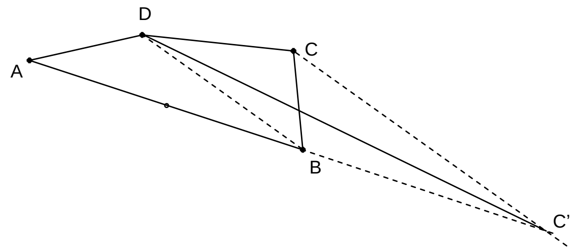
- man wandelt beide in Rechtecke mit einer Einheitsseite um und vergleicht deren andere Seitenlängen,
- oder man verwandelt beide in jeweils flächengleiche Quadrate und vergleicht diese Quadrate.

**Aufgabe**

Wandeln sie das folgende Viereck in ein flächengleiches Rechteck mit der Strecke e als einer Seite um.

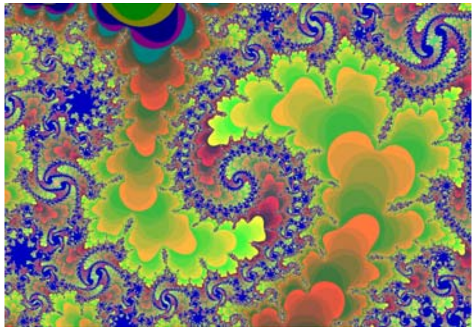


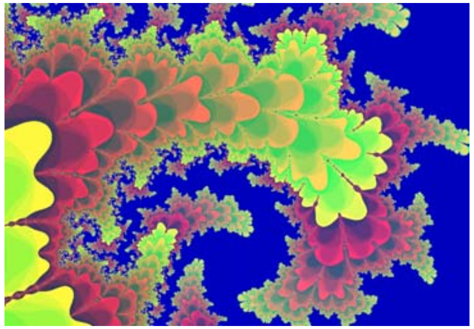

Idee (für beliebige n-Ecke anwendbar): Wandeln Sie das Viereck durch geeignete Scherung des Teildreiecks BCD in ein flächengleiches Dreieck AC'D um („Wegscheren einer Ecke"). Das Dreieck kann dann in ein Parallelogramm und dieses in ein Rechteck mit gegebener Seite e flächengleich umgewandelt werden (Satz vom Ergänzungsparallelogramm S. 59)



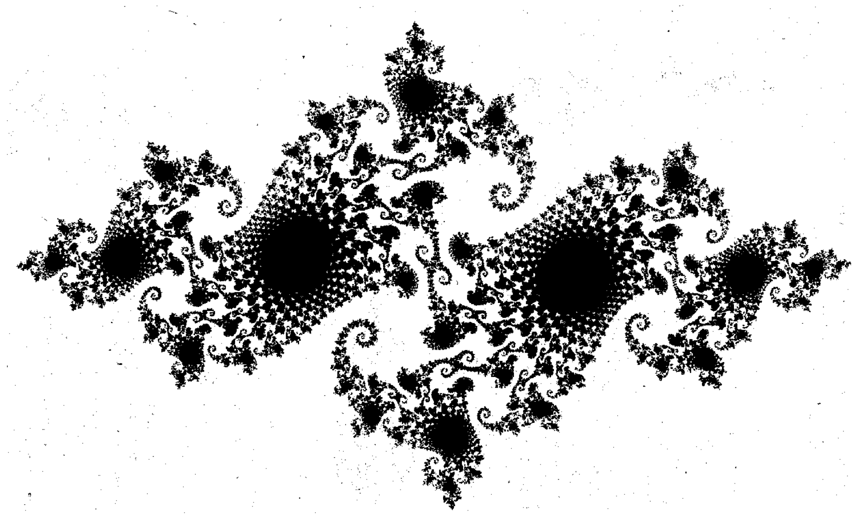
**Problematische Figuren: Fraktale**

Ab Ende des 19.Jahrhunderts wurden in der Mathematik sehr komplizierte „Figuren“ konstruiert, bei denen der intuitive Flächeninhaltsbegriff nicht mehr ausreicht. Erst ab ca. 1980 konnte man gute Bilder solcher Figuren mit Computern herstellen. Für solche „zerrissenen“ Strukturen wurde von Benoit Mandelbrot[4] der Begriff „Fraktale“ geprägt. Da sie ästhetisch ansprechend sind und wegen des Zusammenhangs mit der „Chaos-Theorie“ haben sie eine gewisse Bekanntheit auch außerhalb der Mathematik erreicht. Hier einige Beispiele so genannter „Julia-Mengen“





Wie sollte hier der Flächeninhalt der blauen Flächen definiert werden?



Hat die schwarze Menge von Punkten einen Flächeninhalt? Wie könnte er definiert werden?

[4] B.Mandelbrot, The fractal Geometry of Nature, Freeman New York 1977