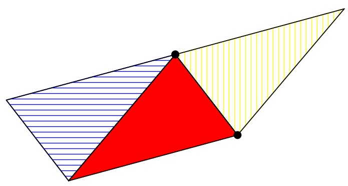
5 Dreieckslehre

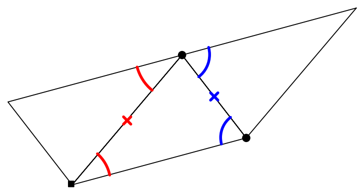
5.1 Bedeutung der Dreiecke

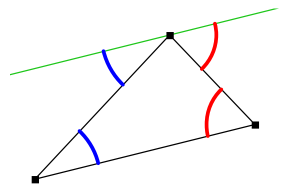
Durch **Triangulation** lassen sich Vielecke in Dreiecke zerlegen (n Eck in n-2 Dreiecke)
⇒ Beweis von Sätzen mittels Sätzen über Dreiecke
(z.B. Winkelsumme, Flächeninhalt, Kongruenz)

5.2 Winkelsumme im Dreieck

Experimentell gewinnbar z.B.


beim Parkettieren


über Punktspiegelungen


durch Winkelsätze an Parallelen

Satz 5.1
Die Winkelsumme im n-Eck beträgt (n-2)·180°.

5.3 Besondere Punkte im Dreieck

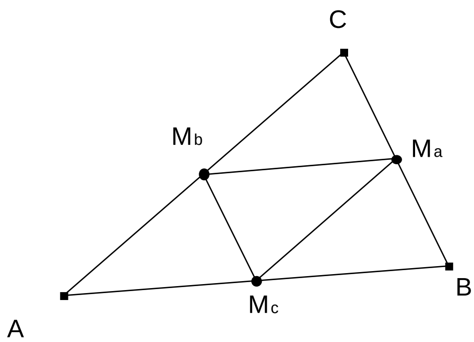
Besonderheit beim Dreieck: 3 "gleichartige" Geraden gehen durch 1 Punkt!

Satz 5.2 (Besondere Linien im Dreieck)
In einem Dreieck schneiden sich
a) die Mittelsenkrechten im Umkreismittelpunkt U;
Dreieck spitzwinklig: U innerhalb des Dreiecks
Dreieck rechtwinklig: U auf der längsten Dreiecksseite
Dreieck stumpfwinklig: U außerhalb des Dreiecks
b) die Winkelhalbierenden im Inkreismittelpunkt;
c) die Seitenhalbierenden im Schwerpunkt S;
dieser teilt die Seitenhalbierenden im Verhältnis 2:1;
d) die Höhen im Höhenschnittpunkt.

Satz 5.3 (Satz vom Mittendreieck)
Verbindet man die Seitenmitten eines Dreiecks, so liegen die Seiten des entstehenden Dreiecks parallel zu Seiten des Ausgangsdreiecks und sind halb so lang.

Beweise (Beispiele)

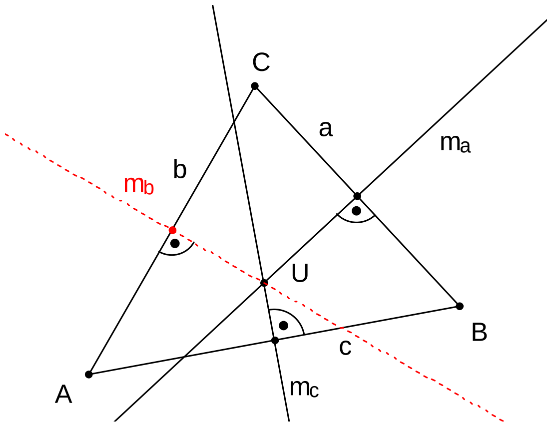
Bevor wir den Satz 5.2 beweisen, beweisen wir zunächst Satz 5.3 vom **Mittendreieck:**
Spiegle das Mittendreieck an seinen Seitenmitten ⇒ Δ ABC.
Bei Punktspiegelung gilt: Bildstrecke || Originalstrecke.



Hinweis: Eigentlich wird nur bewiesen, dass man, ausgehend von $\Delta M_aM_bM_c$ ein Dreieck ΔABC erhält, dessen Mittendreieck $\Delta M_aM_bM_c$ ist. Es wäre zu zeigen, dass man - ausgehend von ΔABC und dessen Mittendreieck $\Delta M_aM_bM_c$ - durch diese Spiegelung wieder zu ΔABC gelangt.

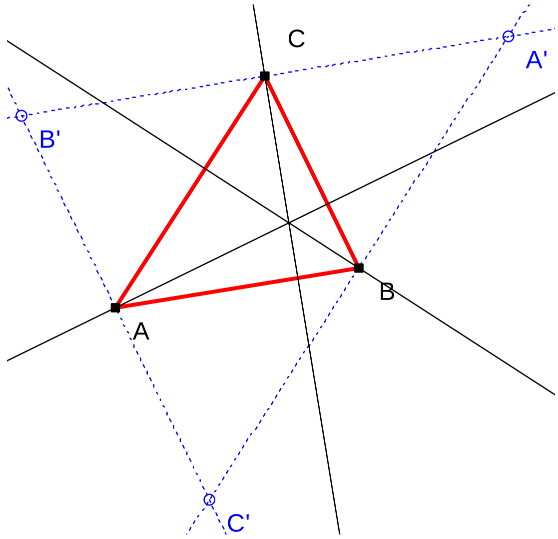
Satz 5.2 a): Umkreismittelpunkt

Sei $U = m_a \cap m_c$
Wegen $|\overline{AU}| = |\overline{BU}|$ und $|\overline{BU}| = |\overline{CU}|$ ist $|\overline{AU}| = |\overline{CU}|$
$\Rightarrow U \in m_b$
$\Rightarrow$U liegt auf allen Mittelsenkrechten und hat von allen Ecken denselben Abstand



Satz 5.2 d): Höhen im Dreieck

Zeichne Dreieck A'B'C' so, dass ABC Mittendreieck von A'B'C' wird!
Höhen von ABC sind Mittelsenkrechten von A'B'C'.



Satz 5.2 c): Seitenhalbierende

Abbildung 1

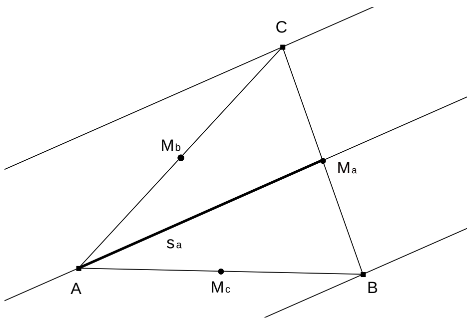


Abbildung 2

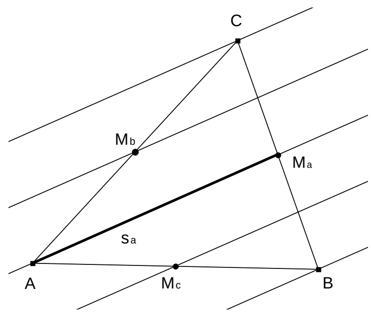
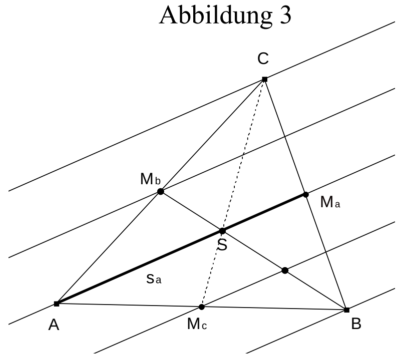
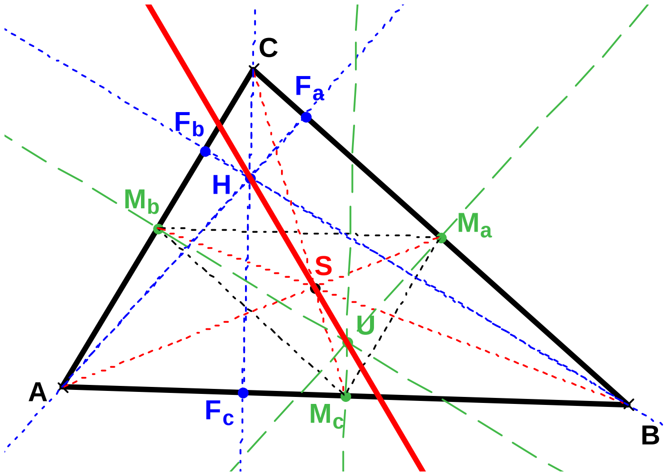


Abbildung 3



Zur Seitenhalbierenden s_a werden die Parallelen durch C und B gezeichnet; diese haben den gleichen Abstand von s_a , da s_a durch die Seitenmitte von $\overline{AB}$ geht (Abbildung 1). Dann zeichnet man die Parallelen zu s_a durch M_b und M_c . Diese sind Mittelparallelen zu den zuvor gezeichneten Parallelenpaaren, es liegt jetzt eine Schar von Parallelen mit gleichen Abständen vor (Abbildung 2). Zeichnet man die Seitenhalbierende $s_b = \overline{BM_b}$, so teilt der Schnittpunkt S von s_a und s_b die Strecke s_b im Verhältnis 2:1. Diese Argumentation kann statt für s_a und s_b für jedes Paar von Seitenhalbierenden wiederholt werden und zeigt daher: Der Schnittpunkt einer Seitenhalbierenden mit einer zweiten teilt diese im Verhältnis 2:1. Daraus folgt unmittelbar, dass alle Seitenhalbierenden durch einen gemeinsamen Punkt S gehen müssen, der die Seitenhalbierenden im Verhältnis 2:1 teilt.

Euler-Gerade (L.Euler, 1765)**:**



Umkreismittelpunkt U, Schwerpunkt S und Höhen-Schnittpunkt H liegen auf einer Geraden.
(Genauigkeits-Prüfer!)
Es ist $|\overline{SH}| = 2\cdot|\overline{US}|$

Der Beweis verwendet die Tatsache, dass das Dreieck ABC durch zentrische Streckung mit Zentrum S und Streckfaktor ½ in das Mittendreieck $M_aM_bM_c$ übergeht, wobei die Höhen von Dreieck ABC auf die Höhen des Mittendreiecks $M_aM_bM_c$ übergehen. Diese sind gerade die Mittelsenkrechten von Dreieck ABC. Damit geht H durch Streckung mit Zentrum S und Streckfaktor -½ in U über. Detaillierte Begründung siehe z.B. KIRSCHE, PETER, S. 106.

5.4 Kongruenzsätze

Die Kongruenzsätze haben wir zu Beginn als „Axiome“ in der folgenden Form vorausgesetzt:
Stimmen zwei Dreiecke in

- den drei Seiten (**sss**), oder
- einer Seite und den anliegenden Winkeln (**wsw**), oder
- zwei Seiten und dem eingeschlossenen Winkel (**sws**), oder
- zwei Seiten und dem der größeren Seite gegenüber liegenden Winkel (**Ssw**),

überein, dann stimmen sie in allen Maßen überein.

Wir haben mit Satz 2.9 gezeigt, dass je zwei in allen Bestimmungsstücken übereinstimmenden Dreiecke **durch genau eine Kongruenzabbildung aufeinander abgebildet** werden können.

5.5 Geometrische Orte

Gegeben: Δ ABC. AB wird festgehalten; C wird so bewegt, dass

- der Flächeninhalt (*C auf Parallele zu AB , genauer zwei Parallelen im gleichen Abstand zu AB)*
- der Umfang (*C auf Ellipse mit Brennpunkten A und B)*
- Winkel γ (C auf einem Kreisbogen über $\overline{AB}$)

unverändert bleibt.

Man nennt diese Kurven (Punktmengen) den **„geometrischen Ort der Punkte mit einer gewissen Eigenschaft“**.

Im Beispiel:

„Der geometrische Ort aller Punkte C’, für die das Dreieck ABC’ mit den festen Punkten A,B den gleichen Flächeninhalt wie das Dreieck ABC hat, ist eine Parallele zu AB“, „Der geometrische Ort aller Punkte C’, für die das Dreieck ABC’ mit den festen Punkten A,B den gleichen Umfang wie das Dreieck ABC hat, ist eine Ellipse“.

Aufgabe

Definieren Sie die folgenden Kurven jeweils als „geometrischen Ort“:

- Der Kreis mit Mittelpunkt M und Radius r.

- Die Mittelsenkrechte der Strecke $\overline{AB}$.
- Die Winkelhalbierende des Winkels $\angle h_f,h_g$ mit den Halbgeraden h_f, h_g als Schenkel.
- Die Seitenhalbierende s_c zur Seite c im Dreieck ABC.

Welche Definition einer Ellipse als Ortslinie ergibt sich aus der 2. Eigenschaft der Beispiele oben?

5.6 Winkelsätze: Umfangswinkelsatz und Sehnen-Tangenten-Winkelsatz

Satz 5.4

(a) Die Umfangswinkel (Peripherie-Winkel γ) auf einem Kreisbogen über einer Strecke $\overline{AB}$ sind alle gleich groß (und ½ so groß wie der zugehörende Mittelpunktswinkel μ)

(b) Die Scheitel C aller Dreiecke ABC mit gleichem Winkel γ bei C über einer Strecke $\overline{AB}$ liegen auf einem Kreisbogen, der durch A und B verläuft.

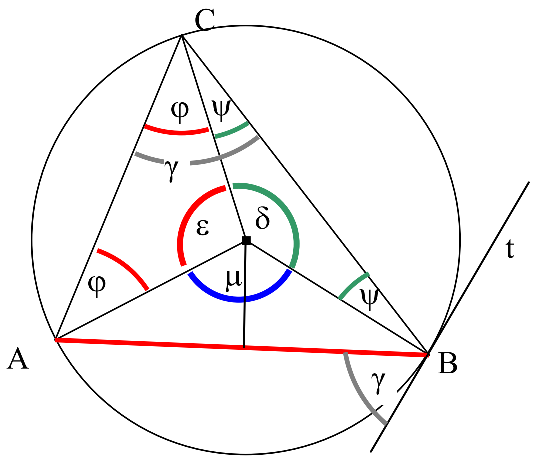
Kurz:

Der geometrische Ort aller Punkte C, für die die Strecke $\overline{AB}$ unter dem gleichen Winkel γ erscheint, ist ein Kreisbogen durch die Punkte A und B.

(c) Der Winkel zwischen der Sehne $\overline{AB}$ und der Tangente in B (Sehnen-Tangenten-Winkel) ist ebenso groß wie der Peripheriewinkel γ (und ½ so groß wie der zugehörende Mittelpunktswinkel).

Sonderfall: Satz des Thales

zu (a):



Andere Lagen des Punktes C?

Umfangswinkel $\gamma = \varphi + \psi$
Mittelpunktswinkel = μ

$2\varphi + \varepsilon = 180°$
$2\psi + \delta = 180°$

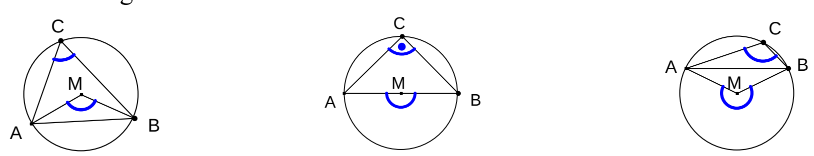
$$\begin{aligned}\mu &= 360° - \varepsilon - \delta \\ &= 360° - (180° - 2\varphi) - (180° - 2\psi) \\ &= 2\varphi + 2\psi\end{aligned}$$

Umfangswinkel = $\frac{1}{2}\mu$ konstant!

zu (b): Sei K der Kreis über $\overline{AB}$ zum Winkel γ aus (a). Offenbar ist für alle Punkte C', die außerhalb des Kreises K liegen, der Winkel bei C' kleiner als γ, für C' innerhalb von K größer als γ (Begründung?).

Zu (c): Die Winkelhalbierende des Mittelpunktswinkels μ steht senkrecht auf der Sehne $\overline{AB}$, der Berührradius steht senkrecht auf der Tangente t in B. Da Winkel, deren Schenkel paarweise senkrecht aufeinander stehen, gleich sind, folgt die Behauptung.

Bemerkung:
Es ist in der oben gewählten Formulierung nicht ganz eindeutig, welcher Mittelpunktswinkel zu einem gegebenen Umfangswinkel gehört. Die folgenden Skizzen sollen den Sachverhalt verdeutlichen.



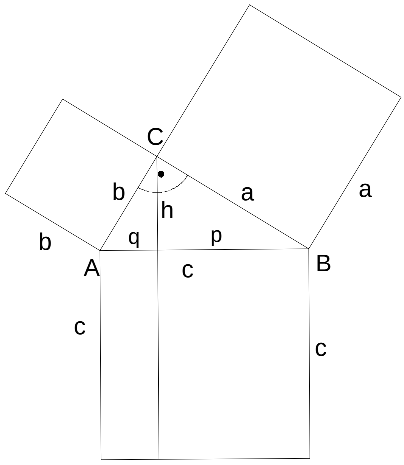
5.7 Flächensätze: Pythagoras-Satzgruppe

Satz 5.5

Im *rechtwinkligen* Dreieck

- **ist das Hypotenusenquadrat so groß wie die Summe der Kathetenquadrate,**
- **ist ein Kathetenquadrat so groß wie das Rechteck aus Hypotenuse und anliegendem Hypotenusenabschnitt**
- **ist das Quadrat über der Höhe so groß wie das Rechteck aus den beiden Hypotenusenabschnitten**

Satz des Pythagoras $a^2 + b^2 = c^2$

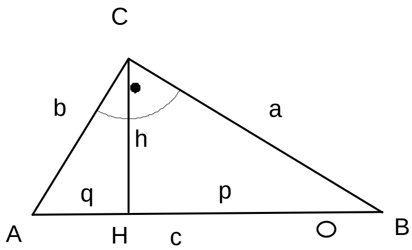


Kathetensatz $a^2 = p \cdot c$, $b^2 = q \cdot c$
(Satz des Euklid)

Höhensatz $h^2 = p \cdot q$

Zu kaum einem Satz gibt es so viele verschiedene Beweise und Veranschaulichungen wie zum Satz des Pythagoras. Hier wird zunächst ein Beweis für alle Sätze der Gruppe mit Hilfe des Ähnlichkeitsbegriffes angegeben. Weitere Beweise folgen im Kapitel über den Flächeninhalt[3]. Während jene Beweise die Sätze als Aussagen über Flächeninhalte auffassen steht hier die Aussage über den Zusammenhang von Streckenlängen im Vordergrund.

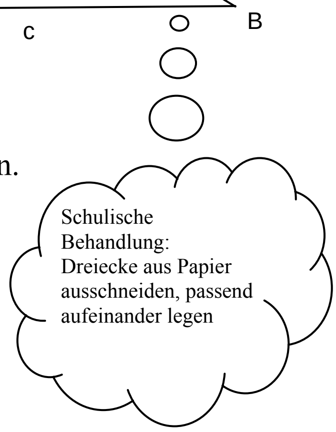
Beweis aller drei Sätze mit Hilfe ähnlicher Dreiecke



Im nebenstehenden Dreieck identifiziert man leicht drei zueinander ähnliche Dreiecke:

$\Delta\, ABC \sim \Delta\, CBH \sim \Delta\, ACH$

Mit diesen Dreiecken kann man viele Verhältnisgleichungen für entsprechende Seiten aufstellen. Sucht man nur diejenigen heraus, in denen nur 3 verschiedene Stücke vorkommen, so erhält man durch Umformen leicht den Kathetensatz und den Höhensatz. Der Satz des Pythagoras folgt unmittelbar aus den beiden Formen des Kathetensatzes durch Addition.



Kathetensatz: $c:a = a:p \Rightarrow a^2 = c \cdot p$
$c:b = b:q \Rightarrow b^2 = c \cdot q$

Höhensatz: $h:p = q:h \Rightarrow h^2 = p \cdot q$

Pythagoras: $a^2 + b^2 = c \cdot p + c \cdot q = c\,(p+q) = c^2$

[3] Vergl. S.58 und S.65

6 Viereckslehre

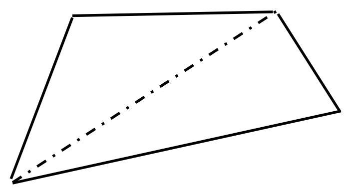
6.1 Haus der Vierecke

Ordnung in der Menge der Vierecke nach der Anzahl und Art der Symmetrien.

Andere Art der Ordnung:
Art, Anzahl und Lage gleichlanger Seiten, gleichgroßer Winkel, Winkel zwischen Diagonalen. Nicht so systematisch, aber für die Schule besser geeignet.

6.2 Winkelsumme im Viereck

experimentell gewinnbar z.B. beim Parkettieren
Punktspiegelungen
Triangulation

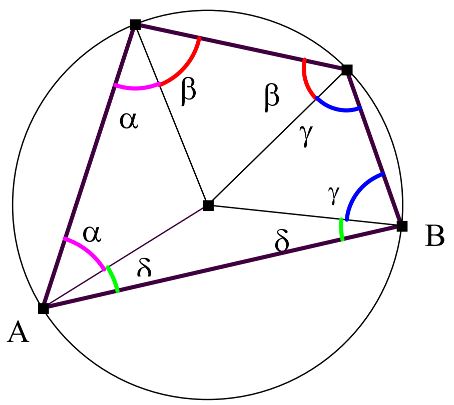


6.3 Vierecke mit Umkreis („Sehnen-Viereck“)

Satz 6.1: Ein Parallelogramm hat genau dann einen Umkreis, wenn es ein Rechteck ist. (Thales)

Satz 6.2: Ein Viereck besitzt genau dann einen Umkreis, wenn zwei gegenüberliegende Winkel zusammen 180° groß sind.

(a) Das Viereck möge einen Umkreis besitzen.

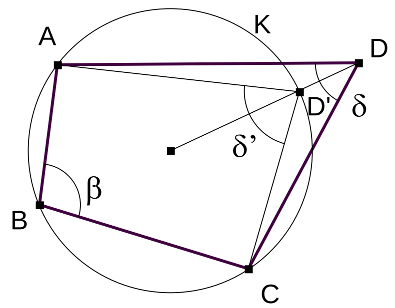


Man verbindet die Eckpunkte des Vierecks mit dem Mittelpunkt des Umkreises. Es entstehen vier gleichschenklige Dreiecke, die daher gleiche Basiswinkel haben. Die Summe einander gegenüber liegender Winkel ist also jeweils $\alpha+\beta+\gamma+\delta$.
Kürzerer Beweis:
Verwende den Satz vom Umfangswinkel über einer Diagonalen

Andere Lagen der Punkte A, B?

(b) Die Summe einander gegenüber liegender Winkel des Vierecks zusammen betragen 180°. Es ist zu zeigen, dass das Viereck einen Umkreis besitzt.

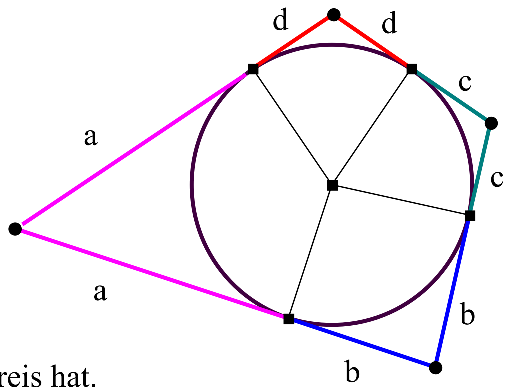
Sei K der Umkreis des Dreiecks ABC. Nach (a) ist für D’ auf K die Summe $\beta+\delta' = 180°$. Liegt D nicht auf K, dann ist δ kleiner oder größer als δ', also $\beta+\delta \neq 180°$ (K ist die Ortslinie für die Scheitel aller Winkel über $\overline{AC}$ der Größe $180°-\beta$).



6.4 Vierecke mit Inkreis („Tangenten-Viereck“)

Satz 6.3: Ein Viereck besitzt genau dann einen Inkreis, wenn die Summe der Längen gegenüberliegender Seiten gleich groß ist.

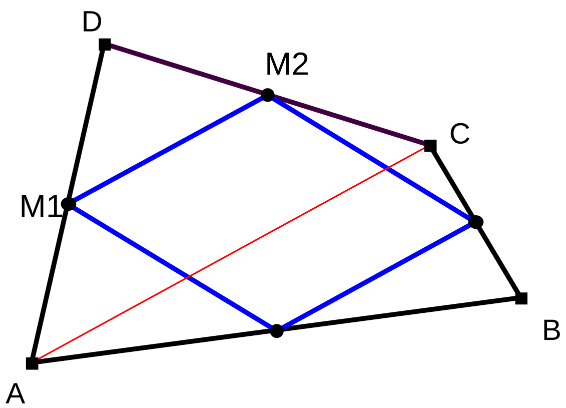
(a) Das Viereck möge einen Inkreis besitzen.
Dann ist die Summe der Längen gegenüber liegender Seiten offensichtlich a+b+c+d.



(b) Die Summe der Längen gegenüber liegender Seiten sei gleich. Es ist zu zeigen, dass das Viereck einen Inkreis hat.
→ Übung.

6.5 Das Mittenviereck

Satz 6.4:
Die Mitten der Seiten eines Vierecks bilden stets ein Parallelogramm.



Beweis: Satz vom Mittendreieck (Satz 5.3, S.50)

Aufgabe:

Beweisen Sie, dass der Flächeninhalt des Mittenparallelogramms die Hälfte des Inhaltes der Vierecksfläche beträgt.