

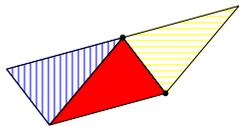
## 5 Dreieckslehre

### 5.1 Bedeutung der Dreiecke

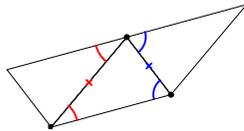
Durch **Triangulation** lassen sich Vielecke in Dreiecke zerlegen (n Eck in n-2 Dreiecke)  
 ⇒ Beweis von Sätzen mittels Sätzen über Dreiecke  
 (z.B. Winkelsumme, Flächeninhalt, Kongruenz)

### 5.2 Winkelsumme im Dreieck

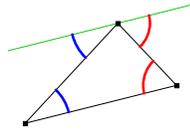
Experimentell gewinnbar z.B.



beim Parkettieren



über Punktspiegelungen



durch Winkelsätze an Parallelen

#### Satz 5.1

Die Winkelsumme im n-Eck beträgt  $(n-2) \cdot 180^\circ$ .

### 5.3 Besondere Punkte im Dreieck

Besonderheit beim Dreieck: 3 "gleichartige" Geraden gehen durch 1 Punkt!

#### Satz 5.2 (Besondere Linien im Dreieck)

In einem Dreieck schneiden sich

- a) die **Mittelsenkrechten** im **Umkreismittelpunkt U**;  
 Dreieck spitzwinklig: U innerhalb des Dreiecks  
 Dreieck rechtwinklig: U auf der längsten Dreiecksseite  
 Dreieck stumpfwinklig: U außerhalb des Dreiecks
- b) die **Winkelhalbierenden** im **Inkreismittelpunkt**;
- c) die **Seitenhalbierenden** im **Schwerpunkt S**;  
 dieser teilt die Seitenhalbierenden im Verhältnis 2:1;
- d) die **Höhen** im **Höhenschnittpunkt**.

#### Satz 5.3 (Satz vom Mittendreieck)

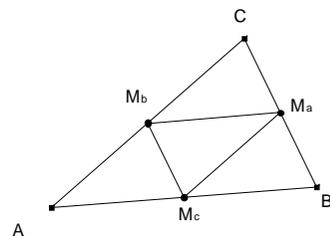
Verbindet man die **Seitenmitten** eines Dreiecks, so liegen die Seiten des entstehenden Dreiecks **parallel zu Seiten des Ausgangsdreiecks** und sind **halb so lang**.

#### Beweise (Beispiele)

Bevor wir den Satz 5.2 beweisen, beweisen wir zunächst Satz 5.3 vom **Mittendreieck**:

Spiegle das Mittendreieck an seinen Seitenmitten ⇒  $\Delta ABC$ .  
 Bei Punktspiegelung gilt: Bildstrecke || Originalstrecke.

Hinweis: Eigentlich wird nur bewiesen, dass man, ausgehend von  $\Delta M_a M_b M_c$  ein Dreieck  $\Delta ABC$  erhält, dessen Mittendreieck  $\Delta M_a M_b M_c$  ist. Es wäre zu zeigen, dass man - ausgehend von  $\Delta ABC$  und dessen Mittendreieck  $\Delta M_a M_b M_c$  - durch diese Spiegelung wieder zu  $\Delta ABC$  gelangt.



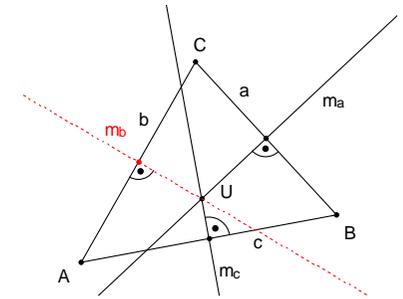
### Satz 5.2 a): Umkreismittelpunkt

Sei  $U = m_a \cap m_c$

Wegen  $|\overline{AU}| = |\overline{BU}|$  und  $|\overline{BU}| = |\overline{CU}|$  ist  $|\overline{AU}| = |\overline{CU}|$

⇒  $U \in m_b$

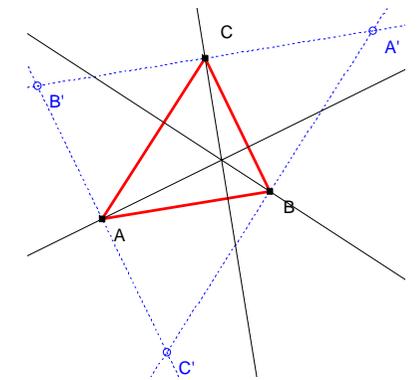
⇒ U liegt auf allen Mittelsenkrechten und hat von allen Ecken denselben Abstand



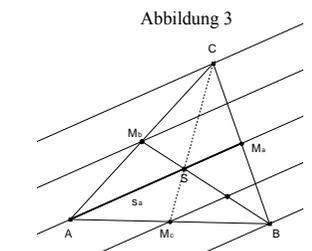
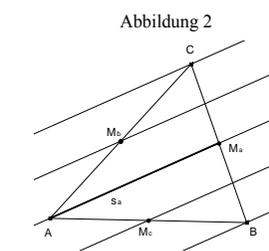
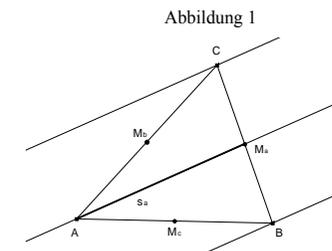
### Satz 5.2 d): Höhen im Dreieck

Zeichne Dreieck  $A'B'C'$  so, dass  $ABC$  Mittendreieck von  $A'B'C'$  wird!

Höhen von  $ABC$  sind Mittelsenkrechten von  $A'B'C'$ .



### Satz 5.2 c): Seitenhalbierende



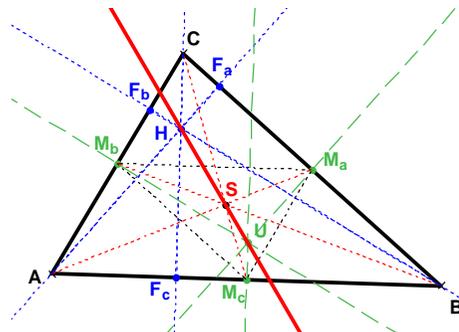
Zur Seitenhalbierenden  $s_a$  werden die Parallelen durch C und B gezeichnet; diese haben den gleichen Abstand von  $s_a$ , da  $s_a$  durch die Seitenmitte von  $AB$  geht (Abbildung 1). Dann zeichnet man die Parallelen zu  $s_a$  durch  $M_b$  und  $M_c$ . Diese sind Mittelparallelen zu den zuvor gezeichneten Parallelenpaaren, es liegt jetzt eine Schar von Parallelen mit gleichen Abständen vor (Abbildung 2). Zeichnet man die Seitenhalbierende  $s_b = \overline{BM_b}$ , so teilt der Schnittpunkt S von  $s_a$  und  $s_b$  die Strecke  $s_b$  im Verhältnis 2:1. Diese Argumentation kann statt für  $s_a$  und  $s_b$  für jedes Paar von Seitenhalbierenden wiederholt werden und zeigt daher: Der Schnittpunkt einer Seitenhalbierenden mit einer zweiten teilt diese im Verhältnis 2:1. Daraus folgt unmittelbar, dass alle Seitenhalbierenden durch einen gemeinsamen Punkt S gehen müssen, der die Seitenhalbierenden im Verhältnis 2:1 teilt.

**Euler-Gerade** (L.Euler, 1765):

Umkreismittelpunkt U, Schwerpunkt S und Höhen-Schnittpunkt H liegen auf einer Geraden.

(Genauigkeits-Prüfer!)

Es ist  $|SH| = 2 \cdot |US|$



Der Beweis verwendet die Tatsache, dass das Dreieck ABC durch zentrische Streckung mit Zentrum S und Streckfaktor 1/2 in das Mittendreieck MaMbMc übergeht, wobei die Höhen von Dreieck ABC auf die Höhen des Mittendreiecks MaMbMc übergehen. Diese sind gerade die Mittelsenkrechten von Dreieck ABC. Damit geht H durch Streckung mit Zentrum S und Streckfaktor -1/2 in U über.

Detaillierte Begründung siehe z.B. KIRSCHKE, PETER, S. 106.

**5.4 Kongruenzsätze**

Die Kongruenzsätze haben wir zu Beginn als „Axiome“ in der folgenden Form vorausgesetzt: Stimmen zwei Dreiecke in

- den drei Seiten (sss), oder
- einer Seite und den anliegenden Winkeln (wsw), oder
- zwei Seiten und dem eingeschlossenen Winkel (sws), oder
- zwei Seiten und dem der größeren Seite gegenüber liegenden Winkel (Ssw),

überein, dann stimmen sie in allen Maßen überein.

Wir haben mit Satz 2.9 gezeigt, dass je zwei in allen Bestimmungsstücken übereinstimmenden Dreiecke durch genau eine Kongruenzabbildung aufeinander abgebildet werden können.

**5.5 Geometrische Orte**

Gegeben:  $\Delta ABC$ . AB wird festgehalten; C wird so bewegt, dass

- der Flächeninhalt ( C auf Parallele zu AB , genauer zwei Parallelen im gleichen Abstand zu AB )
- der Umfang ( C auf Ellipse mit Brennpunkten A und B )
- Winkel  $\gamma$  ( C auf einem Kreisbogen über  $\overline{AB}$  )

unverändert bleibt.

Man nennt diese Kurven (Punktmengen) den „geometrischen Ort der Punkte mit einer gewissen Eigenschaft“.

Im Beispiel:

„Der geometrische Ort aller Punkte C', für die das Dreieck ABC' mit den festen Punkten A,B den gleichen Flächeninhalt wie das Dreieck ABC hat, ist eine Parallele zu AB“, „Der geometrische Ort aller Punkte C', für die das Dreieck ABC' mit den festen Punkten A,B den gleichen Umfang wie das Dreieck ABC hat, ist eine Ellipse“.

**Aufgabe**

Definieren Sie die folgenden Kurven jeweils als „geometrischen Ort“:

- Der Kreis mit Mittelpunkt M und Radius r.

- Die Mittelsenkrechte der Strecke  $\overline{AB}$ .
- Die Winkelhalbierende des Winkels  $\angle h_f, h_g$  mit den Halbgeraden  $h_f, h_g$  als Schenkel.
- Die Seitenhalbierende  $s_c$  zur Seite c im Dreieck ABC.

Welche Definition einer Ellipse als Ortslinie ergibt sich aus der 2. Eigenschaft der Beispiele oben?

**5.6 Winkelsätze: Umfangswinkelsatz und Sehnen-Tangenten-Winkelsatz**

**Satz 5.4**

- (a) Die Umfangswinkel (Peripherie-Winkel  $\gamma$ ) auf einem Kreisbogen über einer Strecke  $\overline{AB}$  sind alle gleich groß (und 1/2 so groß wie der zugehörige Mittelpunktswinkel  $\mu$ )
- (b) Die Scheitel C aller Dreiecke ABC mit gleichem Winkel  $\gamma$  bei C über einer Strecke  $\overline{AB}$  liegen auf einem Kreisbogen, der durch A und B verläuft.

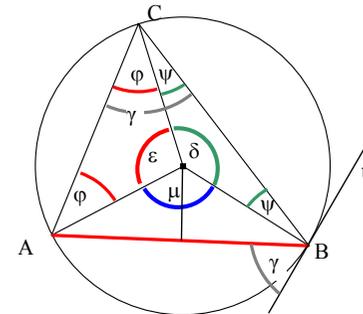
**Kurz:**

Der geometrische Ort aller Punkte C, für die die Strecke  $\overline{AB}$  unter dem gleichen Winkel  $\gamma$  erscheint, ist ein Kreisbogen durch die Punkte A und B.

- (c) Der Winkel zwischen der Sehne  $\overline{AB}$  und der Tangente in B (Sehnen-Tangenten-Winkel) ist ebenso groß wie der Peripheriewinkel  $\gamma$  (und 1/2 so groß wie der zugehörige Mittelpunktswinkel).

**Sonderfall: Satz des Thales**

zu (a):



Andere Lagen des Punktes C?

Umfangswinkel  $\gamma = \varphi + \psi$   
Mittelpunktswinkel =  $\mu$

$2\varphi + \varepsilon = 180^\circ$   
 $2\psi + \delta = 180^\circ$   
 $\mu = 360^\circ - \varepsilon - \delta$   
 $= 360^\circ - (180^\circ - 2\varphi) - (180^\circ - 2\psi)$   
 $= 2\varphi + 2\psi$

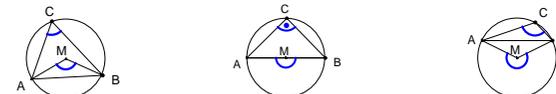
Umfangswinkel =  $\frac{1}{2} \mu$   
konstant!

zu (b): Sei K der Kreis über  $\overline{AB}$  zum Winkel  $\gamma$  aus (a). Offenbar ist für alle Punkte C', die außerhalb des Kreises K liegen, der Winkel bei C' kleiner als  $\gamma$ , für C' innerhalb von K größer als  $\gamma$  (Begründung?).

Zu (c): Die Winkelhalbierende des Mittelpunktswinkels  $\mu$  steht senkrecht auf der Sehne  $\overline{AB}$ , der Berührradius steht senkrecht auf der Tangente t in B. Da Winkel, deren Schenkel paarweise senkrecht aufeinander stehen, gleich sind, folgt die Behauptung.

**Bemerkung:**

Es ist in der oben gewählten Formulierung nicht ganz eindeutig, welcher Mittelpunktswinkel zu einem gegebenen Umfangswinkel gehört. Die folgenden Skizzen sollen den Sachverhalt verdeutlichen.

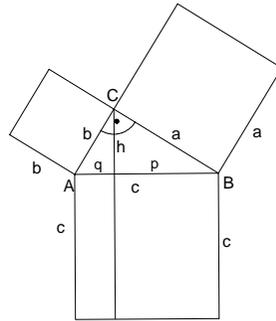


5.7 Flächensätze: Pythagoras-Satzgruppe

Satz 5.5

Im rechtwinkligen Dreieck

- ist das Hypotenusenquadrat so groß wie die Summe der Kathetenquadrate,
- ist ein Kathetenquadrat so groß wie das Rechteck aus Hypotenuse und anliegendem Hypotenusenabschnitt
- ist das Quadrat über der Höhe so groß wie das Rechteck aus den beiden Hypotenusenabschnitten



Satz des Pythagoras  $a^2 + b^2 = c^2$

Kathetensatz (Satz des Euklid)  $a^2 = p \cdot c$  ,  $b^2 = q \cdot c$

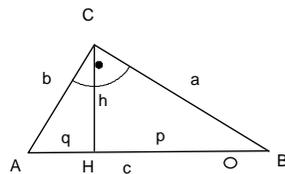
Höhensatz  $h^2 = p \cdot q$

Zu kaum einem Satz gibt es so viele verschiedene Beweise und Veranschaulichungen wie zum Satz des Pythagoras. Hier wird zunächst ein Beweis für alle Sätze der Gruppe mit Hilfe des Ähnlichkeitsbegriffes angegeben. Weitere Beweise folgen im Kapitel über den Flächeninhalt<sup>3</sup>. Während jene Beweise die Sätze als Aussagen über Flächeninhalte auffassen steht hier die Aussage über den Zusammenhang von Streckenlängen im Vordergrund.

Beweis aller drei Sätze mit Hilfe ähnlicher Dreiecke

Im nebenstehenden Dreieck identifiziert man leicht drei zueinander ähnliche Dreiecke:

$\Delta ABC \sim \Delta CBH \sim \Delta ACH$



Mit diesen Dreiecken kann man viele Verhältnismgleichungen für entsprechende Seiten aufstellen. Sucht man nur diejenigen heraus, in denen nur 3 verschiedene Stücke vorkommen, so erhält man durch Umformen leicht den Kathetensatz und den Höhensatz. Der Satz des Pythagoras folgt unmittelbar aus den beiden Formen des Kathetensatzes durch Addition.

Kathetensatz:  $c:a = a:p \Rightarrow a^2 = c \cdot p$   
 $c:b = b:q \Rightarrow b^2 = c \cdot q$

Höhensatz:  $h:p = q:h \Rightarrow h^2 = p \cdot q$

Pythagoras:  $a^2 + b^2 = c \cdot p + c \cdot q = c(p+q) = c^2$



<sup>3</sup> Vergl. S.58 und S.65

6 Viereckslehre

6.1 Haus der Vierecke

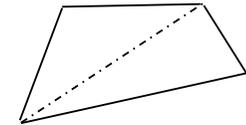
Ordnung in der Menge der Vierecke nach der Anzahl und Art der Symmetrien.

Andere Art der Ordnung:

Art, Anzahl und Lage gleichlanger Seiten, gleichgroßer Winkel, Winkel zwischen Diagonalen. Nicht so systematisch, aber für die Schule besser geeignet.

6.2 Winkelsumme im Viereck

experimentell gewinnbar z.B. beim Parkettieren  
 Punktspiegelungen  
 Triangulation

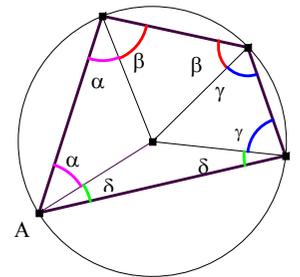


6.3 Vierecke mit Umkreis („Sehnen-Viereck“)

Satz 6.1: Ein Parallelogramm hat genau dann einen Umkreis, wenn es ein Rechteck ist. (Thales)

Satz 6.2: Ein Viereck besitzt genau dann einen Umkreis, wenn zwei gegenüberliegende Winkel zusammen 180° groß sind.

(a) Das Viereck möge einen Umkreis besitzen.

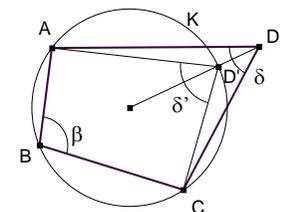


Man verbindet die Eckpunkte des Vierecks mit dem Mittelpunkt des Umkreises. Es entstehen vier gleichschenklige Dreiecke, die daher gleiche Basiswinkel haben. Die Summe einander gegenüber liegender Winkel ist also jeweils  $\alpha + \beta + \gamma + \delta$ .  
 Kürzerer Beweis:  
 Verwende den Satz vom Umfangswinkel über einer Diagonalen

Andere Lagen der Punkte A, B?

(b) Die Summe einander gegenüber liegender Winkel des Vierecks zusammen betragen 180°. Es ist zu zeigen, dass das Viereck einen Umkreis besitzt.

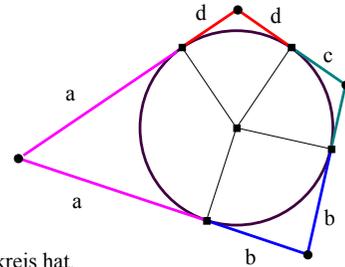
Sei K der Umkreis des Dreiecks ABC. Nach (a) ist für D' auf K die Summe  $\beta + \delta' = 180^\circ$ . Liegt D nicht auf K, dann ist  $\delta$  kleiner oder größer als  $\delta'$ , also  $\beta + \delta \neq 180^\circ$  (K ist die Ortslinie für die Scheitel aller Winkel über  $\overline{AC}$  der Größe  $180^\circ - \beta$ ).



#### 6.4 Vierecke mit Inkreis („Tangenten-Viereck“)

**Satz 6.3:** Ein Viereck besitzt genau dann einen Inkreis, wenn die Summe der Längen gegenüberliegender Seiten gleich groß ist.

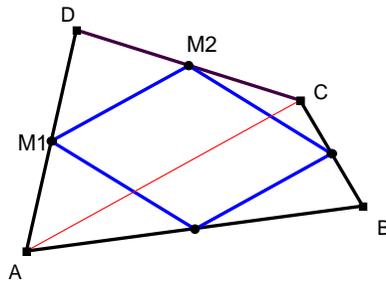
- (a) Das Viereck möge einen Inkreis besitzen. Dann ist die Summe der Längen gegenüberliegender Seiten offensichtlich  $a+b+c+d$ .



- (b) Die Summe der Längen gegenüberliegender Seiten sei gleich. Es ist zu zeigen, dass das Viereck einen Inkreis hat.  
→ Übung.

#### 6.5 Das Mittenviereck

**Satz 6.4:** Die Mitten der Seiten eines Vierecks bilden stets ein Parallelogramm.



Beweis: Satz vom Mittendreieck (Satz 5.3, S.50)

#### Aufgabe:

Beweisen Sie, dass der Flächeninhalt des Mittenparallelogramms die Hälfte des Inhaltes der Vierecksfläche beträgt.