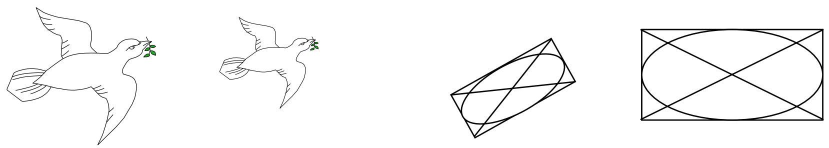
4 Ähnlichkeitsabbildungen

Beispiele „Verkleinerungen“, „Vergrößerungen“

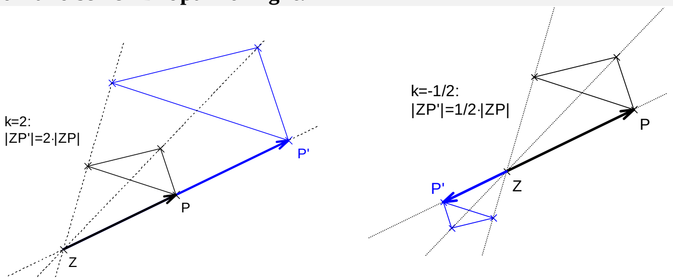


Bijektive, geradentreue Abbildungen, bei denen die Winkel erhalten werden, aber nicht notwendig auch die Längen.

4.1 Zentrische Streckungen

Definition 4.1
Es sei Z ein Punkt der Ebene E; $k \in \mathbb{R} \setminus \{0\}$.
Eine Abbildung $E \to E$ heißt zentrische Streckung mit (Streck-)Zentrum Z und Streckfaktor k
$\Leftrightarrow$ für jeden Punkt P und seinen Bildpunkt P‘ gilt: $\overrightarrow{ZP'} = k \cdot \overrightarrow{ZP}$

Beispiele:



Eigenschaften einer zentrischen Streckung:

- Umkehrabbildung ist die zentrische Streckung mit demselben Zentrum und dem Streckfaktor 1/k. Insbesondere ist eine zentrische Streckung bijektiv.
- Fixelemente einer zentrischen Streckung:
  - Fixpunkt: Z
  - Fixgeraden: alle Geraden durch Z

Invarianten einer zentrischen Streckung:

- geradentreu
- Bildgerade || Originalgerade
- parallelentreu
- winkelmaßtreu
- umlaufsinntreu
- teilverhältnistreu
- streckenverhältnistreu (erklären Sie den Unterschied zur Teilverhältnistreue)
- i.a. ***nicht flächeninhaltstreu***

Einige Beweise:

- Geradentreue: Lassen wir aus, weil sie unmittelbar einleuchtend erscheint, aber zum Beweis einigen Aufwand erfordert.

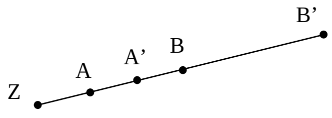
- Bildgerade || Originalgerade:
  Falls $Z \in g$ ist, dann ist g’=g und damit g’ || g. Falls $Z \notin g$ aber $g' \cap g = \{P\}$ dann wäre P Fixpunkt $\neq$Z. Also ist auch in diesem Fall g’ || g.
- Parallelentreue, Winkelmaßtreue:
  Folgen unmittelbar aus der vorangehenden Eigenschaft.
- Umlaufsinntreue: Offensichtlich.
- Teilverhältnistreue: Beweis später, Satz 4.3.

Der folgende Satz formuliert, dass eine zentrische Streckung das leistet, was man sich unter einer Vergrößerung mit Faktor k vorstellt.

Satz 4.1
Bei einer zentrischen Streckung mit Faktor k gilt für *jede* Strecke $\overline{AB}$: $|\overline{A'B'}| = |\mathbf{k}| \cdot |\overline{AB}|$

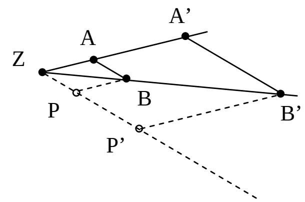
Beweis:

1.Fall:
A, B liegen auf einer Geraden g durch Z. Dann gilt
$|\overline{A'B'}| = |\overline{ZB'}| - |\overline{ZA'}| = k|\overline{ZB}| - k|\overline{ZA}| = k(|\overline{ZB}| - |\overline{ZA}|) = k|\overline{AB}|$



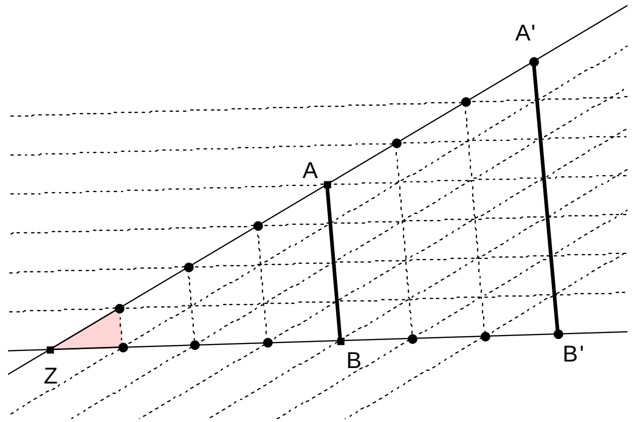
andere Lagen von A,B?

2.Fall:
A,B liegen nicht auf einer Geraden g durch Z (s. Abbildung).
Ergänze Dreieck ZAA’ zu Parallelogramm ZAA’P. Es ist $|\overline{ZP}| = |\overline{AB}|$.
Strecke P mit Faktor k. Es ist $|\overline{ZP'}| = k|\overline{ZP}|$ und $\overline{PB}$ geht in $\overline{P'B'}$
über. Daher ist $\overline{P'B'} \parallel \overline{PB} \parallel \overline{ZA'}$, ZA’B’P’ ist also ein Parallelogramm
und $|\overline{A'B'}| = |\overline{ZP'}| = k|\overline{ZP}| = k|\overline{AB}|$.
Negative Werte von k: Übung.

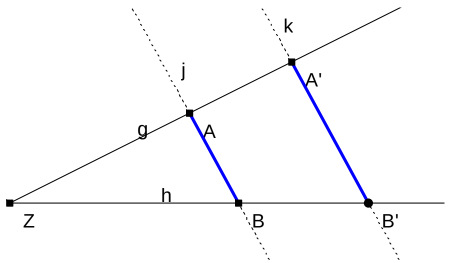


Hier ein anderer Beweis, zunächst aber nur für rationale k. Man müsste für den allgemeinen Fall eine Grenzwertbetrachtung anschließen.

Hier ist k=$\frac{7}{4}$



4.2 Die Strahlensätze



Satz 4.2
Voraussetzung: Gegeben sind 4 Geraden g, h, j, k mit folgenden Eigenschaften (vgl. Figur):
$g \cap h = \{Z\}$
$g \cap j = \{A\}$; $g \cap k = \{A'\}$; $h \cap j = \{B\}$, $h \cap k = \{B'\}$

Dann gilt:

1.Strahlensatz:

Ist j || k, so ist $\frac{|\overline{ZA'}|}{|\overline{ZA}|} = \frac{|\overline{ZB'}|}{|\overline{ZB}|}$ **und** $\frac{|\overline{ZA}|}{|\overline{AA'}|} = \frac{|\overline{ZB}|}{|\overline{BB'}|}$.

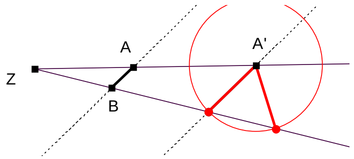
Umkehrung des 1. Strahlensatzes:

Ist $\frac{|\overline{ZA'}|}{|\overline{ZA}|} = \frac{|\overline{ZB'}|}{|\overline{ZB}|}$ **oder** $\frac{|\overline{ZA}|}{|\overline{AA'}|} = \frac{|\overline{ZB}|}{|\overline{BB'}|}$, **so ist j || k .**
(dient häufig zum Nachweis der Parallelität von Geraden!)

2.Strahlensatz:

Ist j || k, so ist $\frac{|\overline{ZA'}|}{|\overline{ZA}|} = \frac{|\overline{A'B'}|}{|\overline{AB}|}$

Der 2. Strahlensatz ist nicht umkehrbar!



Beweis des 1.Strahlensatzes

Durch $k = \frac{|\overline{ZA'}|}{|\overline{ZA}|}$ wird eine zentrische Streckung definiert.

Das Bild von B unter dieser Streckung sei $B^{\sim}$. Dann ist $A'B^{\sim} \parallel AB$. Aus $AB \parallel A'B'$ folgt $A'B^{\sim} \parallel A'B'$,

also $B' = B^{\sim}$ und damit auch $k = \frac{|\overline{ZB'}|}{|\overline{ZB}|}$

Beweis der Umkehrung des 1.Strahlensatzes

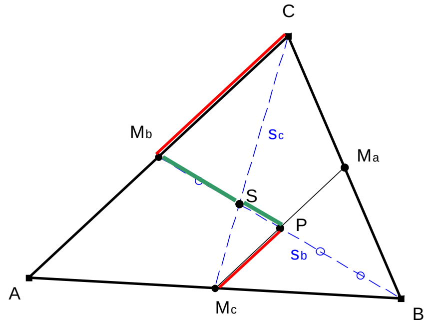
Es sei $\frac{|\overline{ZA'}|}{|\overline{ZA}|} = \frac{|\overline{ZB'}|}{|\overline{ZB}|} = k$.

$\Rightarrow$ A und B werden durch zentrische Streckung mit Faktor k auf A' und B' abgebildet. $\Rightarrow$ AB || A'B'.

Beweis des 2.Strahlensatzes: Unmittelbar klar mit Satz 4.1.

Anwendungsbeispiel: Anderer Beweis des Satzes vom Schwerpunkt eines Dreiecks

Satz vom Schwerpunkt eines Dreiecks
In einem Dreieck schneiden sich die Seitenhalbierenden (Schwerlinien) in einem Punkt S.
S teilt jede Seitenhalbierende im Verhältnis 2:1.



$\{S\} = s_c \cap s_b$
$\{P\} = M_cM_a \cap s_b$

$|\overline{SM_b}| : |\overline{SP}| = |\overline{CM_b}| : |\overline{M_cP}| = 2:1$
(2. Strahlensatz; Zentrum S)

$|\overline{PB}| = |\overline{PM_b}|$
(1. Strahlensatz; Zentrum B)

$\Rightarrow |\overline{BS}| : |\overline{SM_b}| = 2:1$

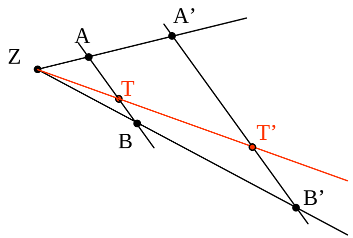
Analoges gilt für s_a und s_b .
Sei $\{S^*\} = s_c \cap s_a$ .Wie oben gilt für S* auf s_b $|\overline{BS^*}| : |\overline{S^*M_b}| = 2:1$ $\Rightarrow$ S = S*

Teilverhältnistreue
Aus den Strahlensätzen ist beweisbar:

Satz 4.3
Drei Punkte A, B, T einer Geraden g werden durch zentrische Streckung auf die Punkte A', B', T' der Geraden g' abgebildet. Dann gilt:
Ist $|\overline{AT}| = r \cdot |\overline{TB}|$, **so ist auch** $|\overline{A'T'}| = r \cdot |\overline{T'B'}|$

Beweis:

$\frac{|\overline{A'T'}|}{|\overline{AT}|} = \frac{|\overline{ZT'}|}{|\overline{ZT}|} = \frac{|\overline{T'B'}|}{|\overline{TB}|} \Rightarrow \frac{|\overline{A'T'}|}{|\overline{T'B'}|} = \frac{|\overline{AT}|}{|\overline{TB}|} =: r$



4.3 Flächeninhalt und Volumen bei zentrischer Streckung

Satz 4.4
Bei einer zentrischen Streckung mit dem Faktor k wird
- **jede Fläche auf eine Fläche mit k^2 fachem Inhalt abgebildet,**
- **jeder Körper auf einen Körper mit k^3 fachem Volumen abgebildet.**

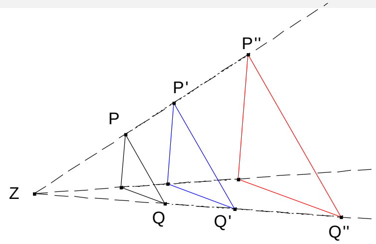
Anwendung:
Wird ein massiver Körper aus homogenem Material auf das k-fache vergrößert, dann nimmt sein Volumen und damit sein Gewicht auf das k^3-fache zu. Verdoppelt man bei einer massiven Gipsfigur also die Höhe, „ohne die Form zu ändern" (d.h. streckt sie mit dem Faktor 2), dann nimmt das Gewicht auf das 8-fache zu.

4.4 Hintereinanderausführen von zentrischen Streckungen

a) gleiches Streckzentrum

Satz 4.5 a)

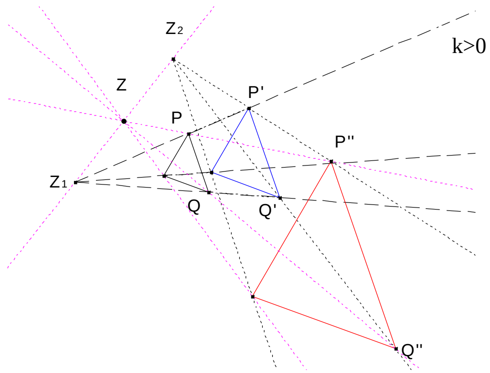
Das Hintereinanderausführen von zwei zentrischen Streckungen mit gemeinsamem Streckzentrum Z und den Streckfaktoren k_1 und k_2 lässt sich ersetzen durch eine zentrische Streckung mit Streckzentrum Z, Streckfaktor $k_1 \cdot k_2$.



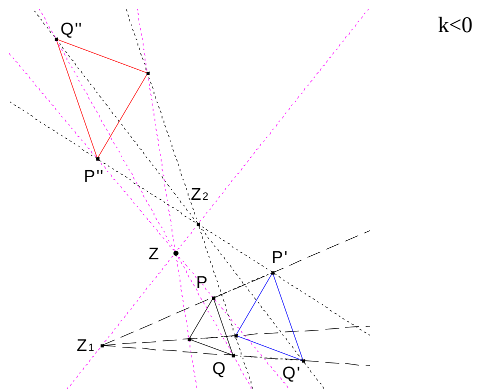
b) verschiedene Streckzentren

Fall 1: $k_1 \cdot k_2 \neq 1$

Alle Streckenlängen werden mit dem Faktor $k = k_1 \cdot k_2 \neq 1$ verändert, Strecke und Bildstrecken sind parallel und gleich gerichtet für k>0 , parallel und entgegen gerichtet für k<0. Daher schneiden sich die Verbindungsgeraden aller Punktepaare P, P'', Q, Q''.



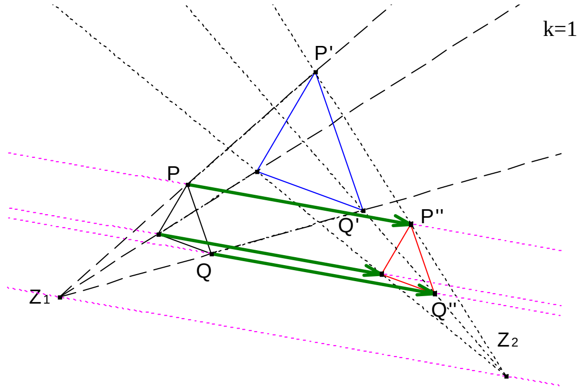
Zu zeigen ist, dass alle sich im *gleichen* Punkt Z schneiden. Dies folgt aus der Parallelität von Strecken und Bildstrecken zusammen mit der Tatsache, dass das Verhältnis von Bildstrecke zu Urbildstrecke k ist (Argumente sind genauer auszuführen).



Da die Gerade Z_1Z_2 Fixgerade für beide zentrischen Streckungen ist, ist sie auch Fixgerade für die Verkettung der beiden Streckungen. Das Zentrum Z muss also auf Z_1Z_2 liegen.

Fall 2: $k_1 \cdot k_2 = 1$

Alle Streckenlängen bleiben unverändert, Strecke und Bildstrecken sind parallel und gleich gerichtet. Daher sind die Verbindungsgeraden aller Punktepaare P, P'', Q, Q'' parallel, die entsprechenden Verbindungsstrecken gleich lang und gleich gerichtet (Argumente sind genauer auszuführen).
Daher ist die Verkettung eine Verschiebung mit Fixgerade Z_1Z_2 , also parallel zu Z_1Z_2.

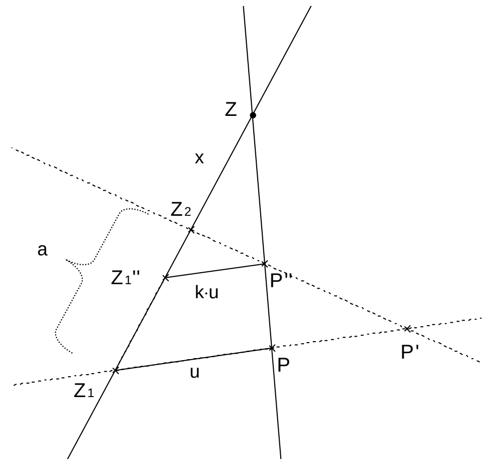


Satz 4.5 b)

Das Hintereinanderausführen von zwei zentrischen Streckungen mit verschiedenen Streckzentren und den Streckfaktoren k_1 und k_2 lässt sich ersetzen

- **durch eine zentrische Streckung, falls $k_1 \cdot k_2 \neq 1$, (Streckzentrum auf Z_1Z_2)**
- **durch eine Verschiebung, falls $k_1 \cdot k_2 = 1$ (Verschiebung || Z_1Z_2)**

Der eben geführte Beweis von Satz 4.5 ist zwar anschaulich, weist aber einige Lücken auf. Daher geben wir noch einen ausführlichen lückenlosen Beweis an, der aber weniger anschaulich ist. Zudem liefert er noch Aussagen über die Lage des Streckzentrums bzw. die Größe des Verschiebungsvektors.



Wir bezeichnen die beiden zentrischen Streckungen mit $Z(Z_1,k_1)$ und $Z(Z_2,k_2)$. Es gilt

Z_1 ist Fixpunkt von $Z(Z_1,k_1)$, d.h. $Z_1' = Z_1$,

Z_1'' ist durch $Z(Z_2,k_2)$ festgelegt so dass $\overrightarrow{Z_2Z_1''} = k_2 \cdot \overrightarrow{Z_2Z_1}$.

Sei P ein beliebiger Punkt, sein P' das Bild unter $Z(Z_1,k_1)$, und P'' dessen Bild unter $Z(Z_2,k_2)$. Ist $|\overline{Z_1P}|$=u, dann ist $|\overline{Z_1P'}|=k_1 \cdot u$. Die Strecke $\overline{Z_1''P''}$ ist Bild von $\overline{Z_1P'}$ unter $Z(Z_2,k_2)$, hat also die Länge $k_2 \cdot k_1 \cdot u = k \cdot u$.

Fall k≠1

Die Gerade PP’’ schneidet für k≠1 die Gerade Z_1Z_2 im Punkt Z. Wir zeigen, dass Z unabhängig von P ist, also *alle* Geraden PP’’ durch Z gehen.

Aus dem 2.Strahlensatz folgt $\frac{|\overline{Z_1Z}|}{|\overline{Z''Z}|} = \frac{u}{k \cdot u} = \frac{1}{k}$, also unabhängig von P. Dadurch ist Z unabhängig von P festgelegt.

Ist x die Entfernung von Z und Z_2, dann kann man x (mit Vorzeichen) berechnen:

$$\frac{x+a}{x+k_2 \cdot a} = \frac{1}{k} \qquad \Rightarrow \qquad x = \frac{k_2(1-k_1)}{k_1k_2 - 1} \cdot a \,.$$

Fall k=1

$\overline{Z_1''P''}$ ist parallel zu $\overline{Z_1P}$ und gleich lang und gleich gerichtet und geht durch Z_1“. Das zeigt, dass P“ aus P durch Verschiebung um den Vektor $\overrightarrow{Z_1Z_1''}$ hervorgeht, unabhängig von der Lage von P. $\overrightarrow{Z_1Z_1''}$ ist offensichtlich $(1-k_2) \cdot \overrightarrow{Z_1Z_2}$.

4.5 Ähnlichkeitsabbildungen

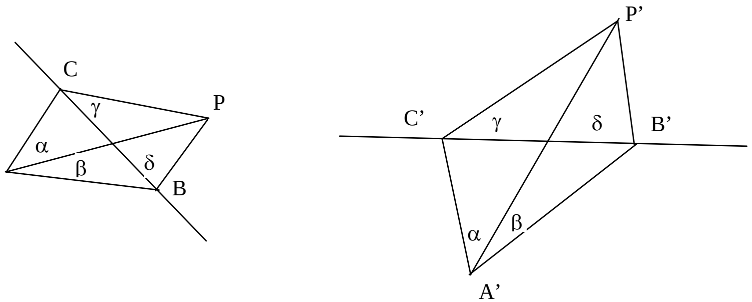
Definition 4.2
Eine Abbildung f: E→E heißt Ähnlichkeitsabbildung
⇔ f ist bijektiv, geradentreu und winkeltreu

Satz 4.6
Durch das Abbilden eines einzigen Dreiecks ist eine Ähnlichkeitsabbildung eindeutig festgelegt.

Beweis (ganz analog zum Beweis des entsprechenden Satzes 2.6 für Kongruenzabbildungen):

Das Bild eines (nicht ausgearteten) Dreiecks ABC sei A’B’C‘. Sei P ein *beliebiger* Punkt der Ebene. Wir müssen zeigen, dass das Bild von P eindeutig festgelegt ist. Dazu zeichnen wir die Gerade AP (für P ≠A).

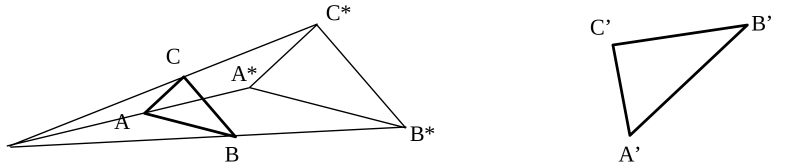
α, β, γ, δ seien die Winkel gemäß unten stehender Abbildung. Durch die Abbildung des Dreiecks ABC auf A’B’C’ ist wegen der Winkeltreue auch das Bild des Vierecks ABPC mit den entsprechenden Winkeln eindeutig bestimmt. Damit liegt das Bild von P’ eindeutig fest.



Übung: Zeichnen Sie Skizzen für weitere mögliche Lagen von P und prüfen, Sie, ob dann die Argumentation oben ebenfalls richtig ist.

Satz 4.7
Die Ähnlichkeitsabbildungen sind genau die Verkettungen einer zentrischen Streckung mit einer Kongruenzabbildung.

Beweis
Offensichtlich ist jede Verkettung einer zentrischen Streckung mit einer Kongruenzabbildung bijektiv, geradentreu und winkeltreu, also eine Ähnlichkeitsabbildung.
Sei andererseits eine Ähnlichkeitsabbildung gegeben. Nach Satz 4.6 ist sie durch die Abbildung eines einzigen Dreiecks ABC auf sein Bilddreieck A’B’C’ eindeutig bestimmt. Man kann das Dreieck ABC durch eine zentrische Streckung auf ein Dreieck A*B*C* abbilden, für das die Seite $\overline{A^*B^*}$ die gleiche Länge hat wie $\overline{A'B'}$. Da alle Winkel von ABC, A’B’C’ und A*B*C* gleich sind müssen A*B*C* und A’B’C’ kongruent sein und A*B*C* kann daher durch eine Kongruenzabbildung auf A’B’C’ abgebildet werden.



4.6 Die Gruppe (Ä, ∘) aller Ähnlichkeitsabbildungen einer Ebene

Ä = Menge aller Ähnlichkeitsabbildungen E → E;
∘ = „Hintereinanderausführen“

Es gilt:

- **Ä** ist **abgeschlossen** unter **o**
- **Assoziativgesetz** gilt (f ∘ g) ∘ h = f ∘ (g ∘ h)
- „id“ (die identische Abbildung) ist **neutrales** Element; id ∈ **Ä**
- mit jedem f ∈ **Ä** ist auch das **inverse** Element f^{-1} ∈**Ä**

Satz 4.8
(Ä, ∘) ist eine (unendliche) Gruppe
(K, ∘) ist eine Untergruppe von (Ä, ∘).

4.7 Ähnliche Figuren und Ähnlichkeitssätze

Jetzt kann Ähnlichkeit von Figuren streng mathematisch definiert werden:

Definition 4.3
Zwei Figuren heißen ähnlich
⇔ es gibt eine Ähnlichkeitsabbildung, die die Figuren aufeinander abbildet.

Satz 4.9
Ähnliche Figuren stimmen
1. in allen einander entsprechenden Winkeln und
2. in den Längen*verhältnissen* aller einander entsprechenden Linien
überein.

Beweis:
Die 1.Eigenschaft folgt sofort aus der Definition von Ähnlichkeit. Die 2.Eigenschaft folgt daraus, dass bis auf eine Kongruenzabbildung die Figuren durch zentrische Streckung auseinander hervorgehen und sich die Längen einer Figur nur um den Streckungsfaktor k von denen der anderen unterscheiden. Sind a und b zwei Längen in einer Figur, dann sind die entsprechenden Längen in der anderen Figur $k \cdot a$ und $k \cdot b$ und damit die Verhältnisse $\frac{k \cdot a}{k \cdot b}$ und $\frac{a}{b}$ gleich. Dies gilt nicht nur für Längen von Strecken sondern auch für die Längen nicht geradliniger Linien (z.B. Kreisbögen, Kreise usw., vergl. S.62).

Um die Ähnlichkeit von Dreiecken nachzuweisen benutzt man häufig die Ähnlichkeitssätze, die man unmittelbar aus den entsprechenden Kongruenzsätzen für Dreiecke gewinnt.

Ähnlichkeitssatz	**entsprechender Kongruenzsatz**
Stimmen zwei Dreiecke in	Stimmen zwei Dreiecke in
• den Verhältnissen der drei Seiten oder	• den drei Seiten (**sss**) oder
• zwei Winkeln oder	• einer Seite und den anliegenden Winkeln (**wsw**) oder
• den Verhältnissen von zwei Seiten und dem eingeschlossenen Winkel oder	• zwei Seiten und dem eingeschlossenen Winkel (**sws**) oder
• den Verhältnissen von zwei Seiten und dem der größeren Seite gegenüber liegenden Winkel	• zwei Seiten und dem der größeren Seite gegenüber liegenden Winkel (**Ssw**)
überein, dann sind sie zueinander ähnlich .	überein, dann sind sie zueinander kongruent.

Aufgabe

Führen Sie die Beweise für die Ähnlichkeitssätze aus.

Man kann die Ähnlichkeitssätze immer an Stelle der Strahlensätze benutzen.
In amerikanischen Geometriebüchern für die Schule findet man z.B. gar keine Strahlensätze, alle Argumente benutzen entweder zentrische Streckungen oder Sätze über ähnliche Dreiecke.

Aufgabe

Zeigen Sie, wie die Strahlensätze durch Sätze über ähnliche Dreiecke ersetzt werden können.