

3 Deckabbildungen von Figuren - Symmetrie

3.1 Die Gruppe (K, \circ) aller Kongruenzabbildungen einer Ebene

K ist die Menge aller Kongruenzabbildungen $E \rightarrow E$;

\circ ist die „Hintereinanderausführung“ von Abbildungen

- K ist abgeschlossen unter \circ ,
- das **Assoziativgesetz** gilt: $(f \circ g) \circ h = f \circ (g \circ h)$,
- „id“ ist **neutrales** Element; $\text{id} \in K$ (id ist die identische Abbildung)
- mit jedem $f \in K$ ist auch das **inverse** Element $f^{-1} \in K$

Damit gilt:

Satz 3.1

(K, \circ) ist eine (unendliche) Gruppe

Definition 3.1

Sei h eine Kongruenzabbildung der Ebene E und $F \subseteq E$ eine Figur in der Ebene.

Wenn $h(F)=F$ ist, d.h. wenn F invariant unter h ist, dann nennt man F h -symmetrisch, und h eine Deckabbildung (Symmetrieabbildung) von F .

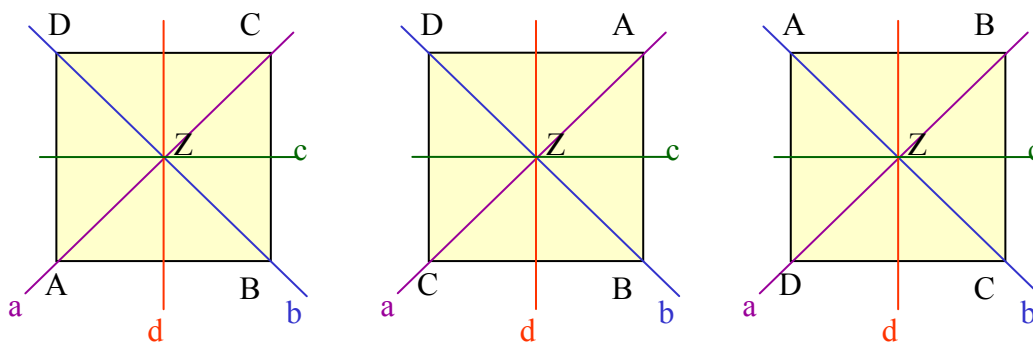
Satz 3.2

Sei $F \subseteq E$ eine (nicht notwendig beschränkte) Figur in der Ebene. Dann ist die Menge der Deckabbildungen (Symmetrieabbildungen) von F eine Untergruppe von (K, \circ) .

Beweis: Übung!

3.2 Die Deckabbildungen eines Quadrats

Die Spiegelachsen sind raumfest!



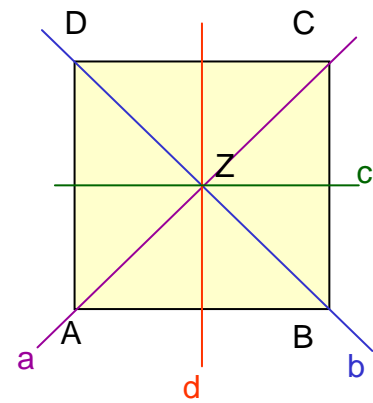
$$\begin{array}{ccc} ABCD & \Rightarrow & CBAD & \Rightarrow & DCBA \\ & & S_b & & D_{Z,90} \end{array}$$

$$S_b \circ D_{Z,90} = S_c$$

Schreibweise hier ab jetzt: „90“ statt $D_{Z,90}$ und „a“ statt S_a

Wir stellen eine Tabelle mit den Verknüpfungen der Deckabbildungen des Quadrats auf:

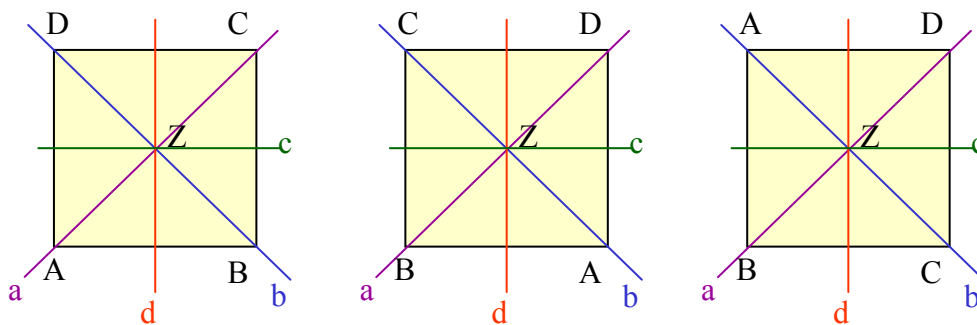
o	0	90	180	270	a	b	c	d
0	0	90	180	270	a	b	c	d
90	90	180	270	0	c	d	b	a
180	180	270	0	90	b	a	d	c
270	270	0	90	180	d	c	a	b
a	a	d	b	c	0	180	270	90
b	b	c	a	d	180	0	90	270
c	c	a	d	b	90	270	0	180
d	d	b	c	a	270	90	180	0



Satz 3.3

Die Menge der Deckabbildungen eines Quadrats bildet eine Gruppe (mit der Hintereinanderausführung als Verknüpfung).

Aufstellen bzw. überprüfen der Verknüpfungstabelle: $d \circ a = 270$?



$$ABCD \xRightarrow{d} BADC \xRightarrow{a} BCDA$$

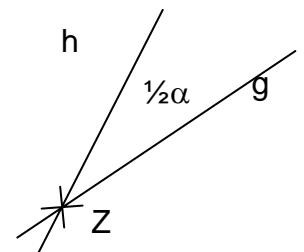
... oder einfach: $d \circ a$ ist eine Drehung um den doppelten Winkel zwischen d und a , $\angle d,a = 135^\circ$.

Man kann die Tabelle leichter überprüfen, wenn man folgende Tatsache über Verkettung von Achsenspiegelung und Drehung benutzt (Übung):

Ist g eine Gerade durch Z , $D_{Z,\alpha}$ eine Drehung um Z mit Winkel α , dann ist

$$S_g \circ D_{Z,\alpha} = S_h, \text{ wobei } Z \in h \text{ und } \angle g,h = \frac{1}{2}\alpha,$$

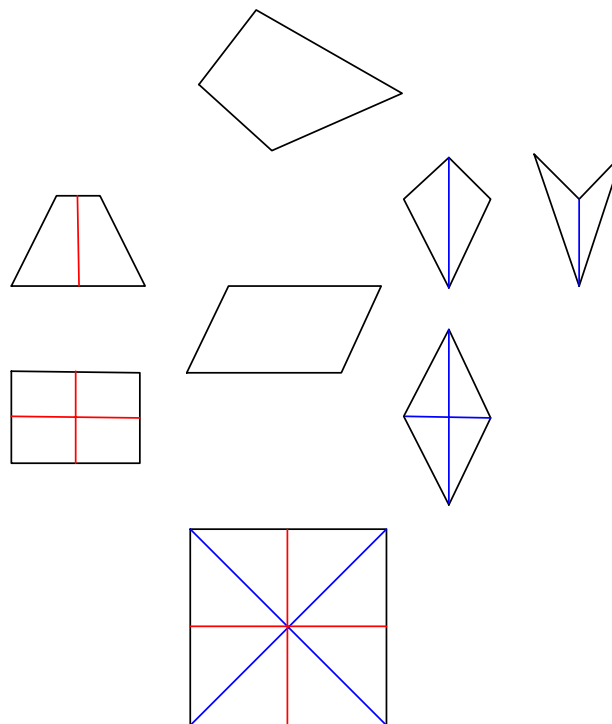
$$D_{Z,\alpha} \circ S_g = S_k, \text{ wobei } Z \in k \text{ und } \angle k,g = \frac{1}{2}\alpha.$$



3.3 Untergruppen der Deckabbildungsgruppe des Quadrats

- | | | |
|----|---|---|
| a) | $\{ D_0, D_{90}, D_{180}, D_{270}, S_a, S_b, S_c, S_d \}$ | Deckabbildungen des Quadrats |
| b) | $\{ D_0, D_{90}, D_{180}, D_{270} \}$ | Deckdrehungen des Quadrats |
| c) | $\{ D_0, D_{180}, S_a, S_b \}$ | Deckabbildungen der Raute |
| d) | $\{ D_0, D_{180}, S_c, S_d \}$ | Deckabbildungen des Rechtecks |
| e) | $\{ D_0, D_{180} \}$ | Deckabbildungen des Parallelogramms |
| f) | $\{ D_0, S_a \}$ | Deckabbildungen des Drachens |
| g) | $\{ D_0, S_c \}$ | Deckabbildungen des (symmetrischen.) Trapezes |
| h) | $\{ D_0 \}$ | Deckabbildungen eines beliebigen Vierecks |

Das „Haus der Vierecke“ Symmetrie als Ordnungsprinzip



Bemerkung: Will man das **allgemeine Trapez** und den **schiefen Drachen** in das „Haus“ aufnehmen, dann muss man zusätzlich Schrägspiegelsymmetrie berücksichtigen.

3.4 Symmetrieachsen - Deckdrehungen einer (beschränkten) Figur

Satz 3.4

Alle Figuren seien beschränkt.

- a) Für jedes $n \in \mathbb{N}$ gilt: Es gibt eine Figur mit genau n Symmetrieachsen.

Lage dieser Symmetrieachsen:

Alle schneiden sich in einem Punkt Z ,

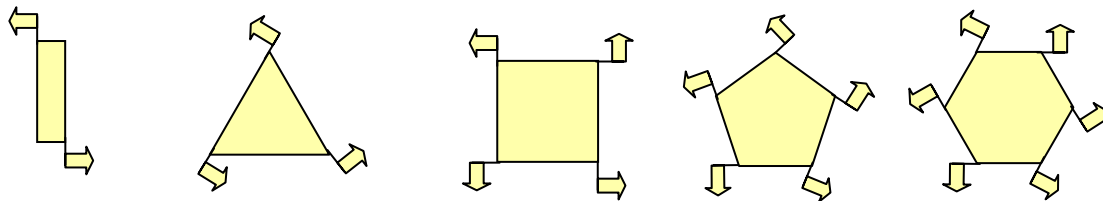
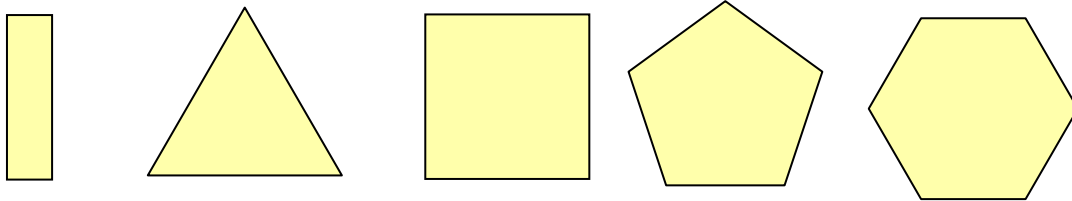
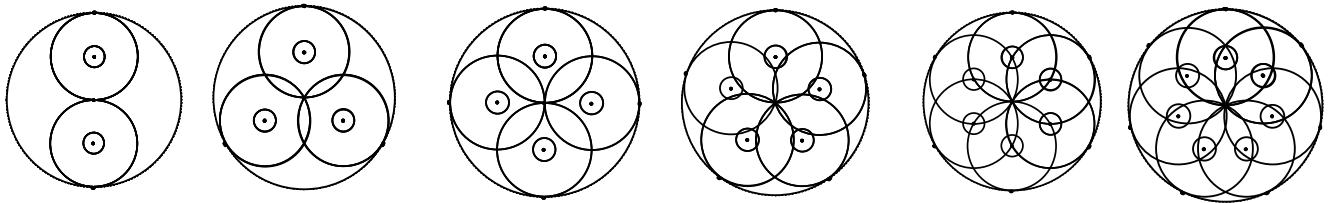
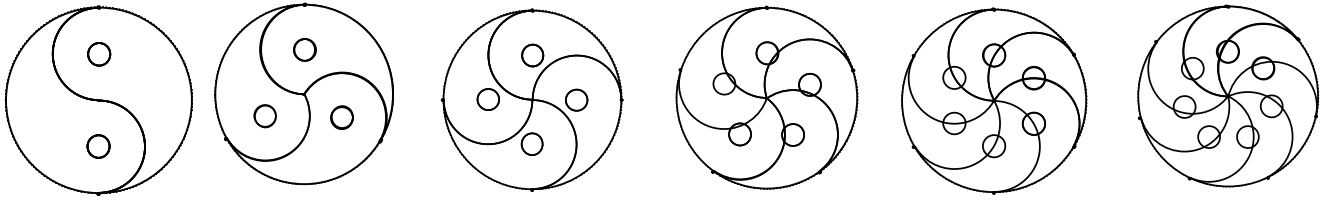
Schnittwinkel zwischen 2 benachbarten Achsen: $360^\circ / (2n)$.

- b) Hat eine Figur genau n Symmetrieachsen, so ist jede Drehung um Z um $360^\circ/n$ eine Deckdrehung der Figur. Es gibt keine Deckdrehung der Figur mit kleinerem Drehwinkel.

⇒ Jede achsensymmetrische Figur mit mindestens 2 Symmetrieachsen ist auch drehsymmetrisch

- c) Nicht jede drehsymmetrische Figur ist auch achsensymmetrisch

Beispiele:



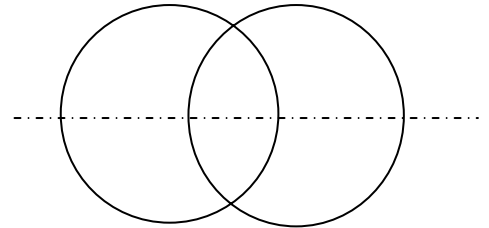
3.5 Kreis - Zweikreisfigur

Kreis

Ein Kreis besitzt unendlich viele Symmetrieachsen (jede Gerade durch M ist Symmetrieachse) und unendlich viele Deckdrehungen (jede Drehung um M ist Deckdrehung),

Zweikreisfigur

Die Figur hat genau zwei Symmetrieachsen.
Die Eigenschaften dieser Figur ist Grundlage für viele Konstruktionen der Geometrie wie Mittelsenkrechte einer Strecke, Winkelhalbierende, Konstruktion einer Raute etc.



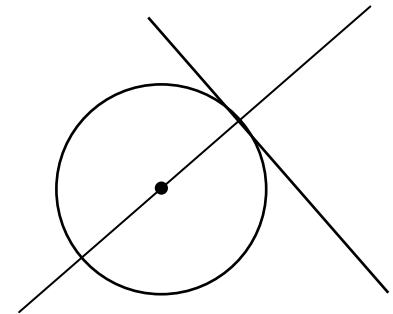
Kreisfigur mit Tangente

Die Figur hat eine Symmetrieachse: den Radius durch den Berührungspunkt.

Folgerung:

Die Tangente steht senkrecht auf dem Berührungsradius.

Dies ist Grundlage für viele Konstruktionen der Geometrie wie Tangente an einen Kreis von einem Punkt außerhalb des Kreises, gemeinsame Tangenten an zwei Kreise.



3.6 Aufgaben zur Symmetrie

Aufgabe

S_g sei eine Achsenspiegelung an g , $F_0 \subseteq E$ eine beliebige Figur, $F_1 = S_g(F_0)$.

Zeigen Sie, dass $F = F_0 \cup F_1$ die kleinste Figur ist, die F_0 enthält und S_g -symmetrisch ist.

Welche einfache geometrische Tätigkeit aus der Grundschule wird hiermit abstrakt und kompliziert beschrieben?

Aufgabe

(a) $D_{Z,120^\circ}$ sei eine Drehung um Z mit Drehwinkel 120° , $F_0 \subseteq E$ eine beliebige Figur, $F_1 = D_{Z,120^\circ}(F_0)$, $F_2 = D_{Z,120^\circ}(F_1)$. Zeigen Sie, dass $F = F_0 \cup F_1 \cup F_2$ die kleinste Figur ist, die F_0 enthält und $D_{Z,120^\circ}$ -symmetrisch ist.

Welche einfache geometrische Tätigkeit aus der Grundschule wird hiermit beschrieben?

(b) Nun sei statt $D_{Z,120^\circ}$ die Drehung $D_{Z,30^\circ}$ gegeben. Beschreiben Sie die Konstruktion der kleinsten Figur, die F_0 enthält und $D_{Z,30^\circ}$ -symmetrisch ist.

(c) Beantworten Sie Frage (b) jeweils für die Drehwinkel 50° , 17° .

Aufgabe

$V_{A,B}$ sei eine Verschiebung um den Vektor, $\vec{v} = \overrightarrow{AB}$ $F_0 \subseteq E$ eine beliebige Figur, $F_0 \neq \emptyset$.

Zeigen Sie, dass es keine beschränkte Figur gibt, die $V_{A,B}$ -symmetrisch ist.

Wie erhält man die „kleinste“ Figur, die F_0 enthält und $V_{A,B}$ -symmetrisch ist?

Welche einfache geometrische Tätigkeit aus der Grundschule wird hiermit beschrieben?

Aufgabe

Geben Sie eine nicht beschränkte Figur an, die Symmetrieachsen hat, die nicht durch einen Punkt gehen.

3.7 Parkettieren

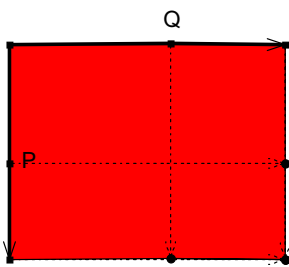
3.7.1 Was ist Parkettieren?

"Parkettieren ist das überlappungsfreie, lückenlose Ausfüllen der Ebene mit einem vorgegebenen endlichen Satz kongruenter Figuren "

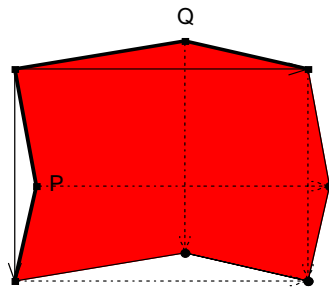
Womit kann man parkettieren?

- Mit welchen *regelmäßigen Vielecken* kann man parkettieren?
- Mit welchen Dreiecken kann man parkettieren?
- Mit welchen Vierecken kann man parkettieren?

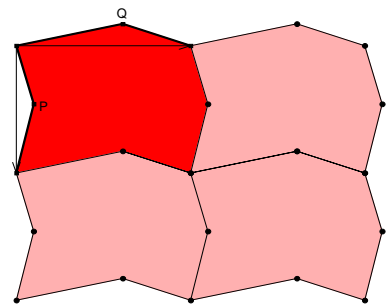
Schwierigere Fragestellung: Parkettierungen mit mehr als einem Typ von Figuren. Beispiele zur Gewinnung einer Parkettierung:



Ausgangsfigur:
Rechteck oder
Parallelogramm

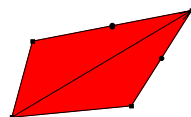


Ausgangsfigur an
gegenüberliegenden Seiten
kongruent verändern

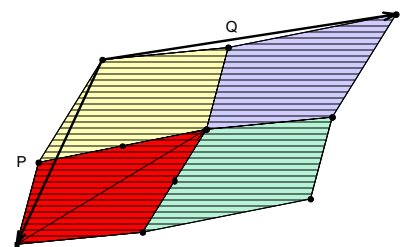


Mit dem entstehenden 8-Eck kann
man die Ebene wie mit der
Ausgangsfigur durch zwei
Wiederholung von 2 Verschiebungen
parkettieren.

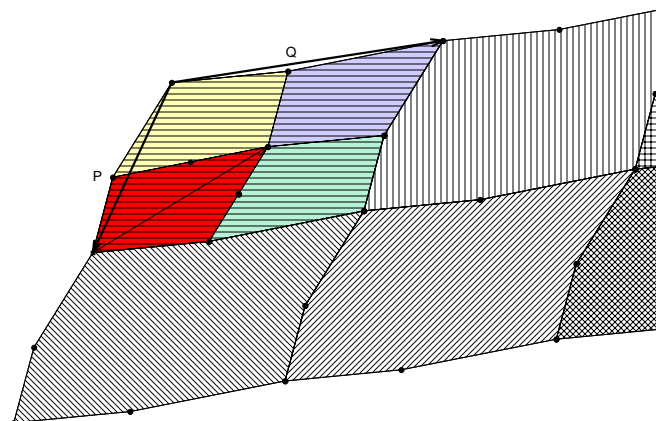
Ausgangsviereck



...8-Eck wie zuvor:



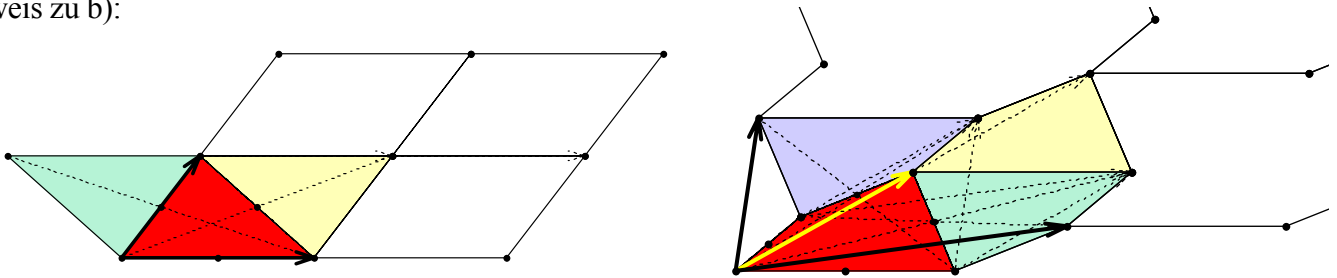
Parkettieren durch 2
Verschiebungen möglich.



Satz 3.5

- a) Mit regelmäßigen n -Ecken kann man genau dann parkettieren, wenn $n = 3, 4, 6$ ist.
 b) Man kann mit jedem beliebigen Dreieck oder Viereck parkettieren.

Beweis zu b):



Aus einem Dreieck erhält man durch Spiegelung an einer Seitenmitte ein Parallelogramm als Grundfigur, aus dem das gesamte Parkett alleine durch mehrfache Verschiebungen erzeugt werden kann.

Auch bei einem beliebigen (konvexen) Viereck kann man durch Spiegeln an einer Seitenmitte eine Grundfigur erhalten, aus der das gesamte Parkett alleine durch mehrfache Verschiebungen erzeugt werden kann. Im Beispiel oben wurde durch Spiegeln an einer Seitenmitte und zusätzliches Verschieben der beiden Vierecke eine Grundfigur erzeugt, mit der man ähnlich wie mit Parallelogrammen parkettieren kann.

3.7.2 Warum wird im Mathematikunterricht parkettiert?

Parkettieren mit Dreiecken und Vierecken ermöglicht in der Schule einen experimentellen Zugang zu den Sätzen über die Winkelsumme.

Als eine Forderung an die Inhalte der Schulmathematik wird häufig genannt

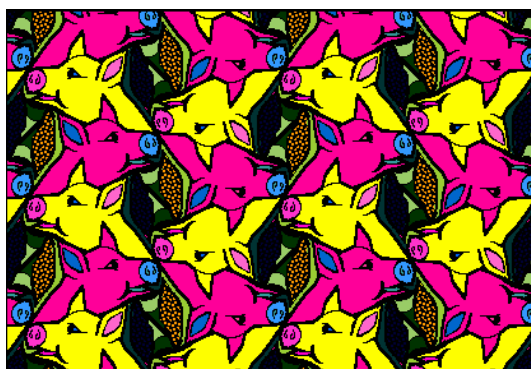
„Die Geometrie (der Grundschule) soll sich an fundamentalen geometrischen Ideen orientieren“.

Realisierung **fundamentaler Ideen der Geometrie** beim Parkettieren:

- die **Idee des Messens** : Vorbereitung des Begriffs „Flächeninhalt“
- die **Idee des Passens** : Längen, Winkel, Winkelsätze, Winkelsummensätze
- Ästhetik** : Einfärben; ansprechende Grundbausteine (Symmetrien ausnützen)

3.7.3 Parkettieren durch geeignetes Verändern von Grundbausteinen

Z.B. mit dem Computer-Programm „Tesselmania“ leicht auch mit Schülern durchführbar.
 Hier zwei Beispiele:



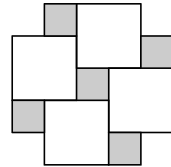
Das Programm findet man als Demo auf dem schwarzen Brett „Schwarzes Brett/Mathematik und Informatik/Geoueb/“

3.7.4 Parkettieren mit mehr als einem Grundbaustein

Beispiele: Parkettieren mit zwei verschieden großen Quadraten.

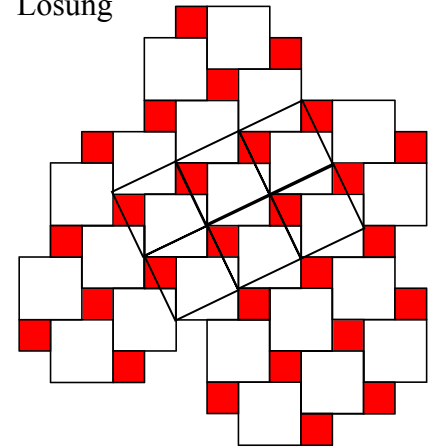
Aufgabe für Schülerinnen und Schüler:

Legt mit den verschiedenen Quadratplättchen eures Vorrats ein Muster, das so aussieht:



Macht das so lange weiter, bis ihr alle Quadrate aus dem Vorrat untergebracht habt.
Zeichnet das fertige Muster auf.

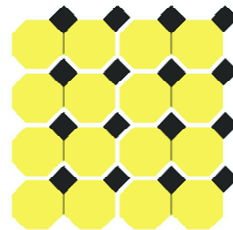
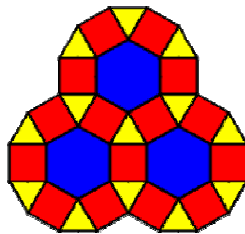
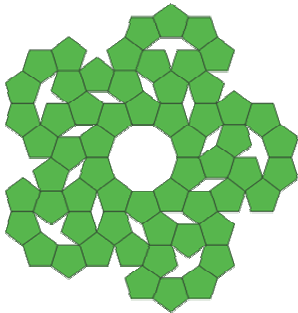
Lösung



Über das Parkett ist ein Parkett aus einer Sorte von Quadraten gelegt, das häufig in Zusammenhang mit dem Satz des Pythagoras gebracht wird. Können Sie den Zusammenhang sehen?

Mit einer Sorte von nicht-regelmäßigen Figuren gibt es oft verschiedene Parkettierungen, wie das nebenstehende Bild aus einem Schulbuch zeigt.

Weitere einfache Beispiele:



Aufgabe: Suchen Sie im Internet Beispiele für interessante Parkettierungsaufgaben (engl.: Tiling). Roger Penrose hat einfache Parkettierungen der Ebene entdeckt, die nicht-periodisch sind, d.h. keine Schubsymmetrie aufweisen.

Es gibt sogar endliche Mengen von Grundbausteinen, die **nur** nicht-periodische Parkettierungen zulassen.

Nebenstehend eine *nicht-periodische* Parkettierung mit zwei Grundbausteinen.

