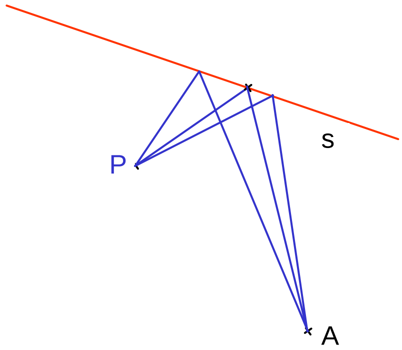
2 Kongruenzabbildungen

2.1 Geradenspiegelungen

a) Spiegel



Wie wirkt ein Spiegel?
Warum glauben wir, zu jedem Punkt vor dem Spiegel gäbe es hinter dem Spiegel einen entsprechenden Punkt im gleichen Abstand von der Spiegelfläche?

Modellvorstellung:

- Jeder beleuchtete Punkt P sendet nach allen Seiten Lichtstrahlen aus.

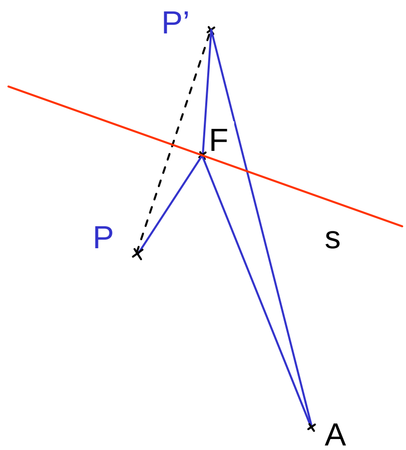
Wie verlaufen die Lichtstrahlen von P über S nach A? Fermat behauptet:

Fermat-Prinzip (Pierre de Fermat, 1601 – 1665)

Licht wählt unter allen möglichen Wegen den kürzesten (im homogenen Medium; sonst den schnellsten)

Was ist der kürzeste Weg von P über S nach A?

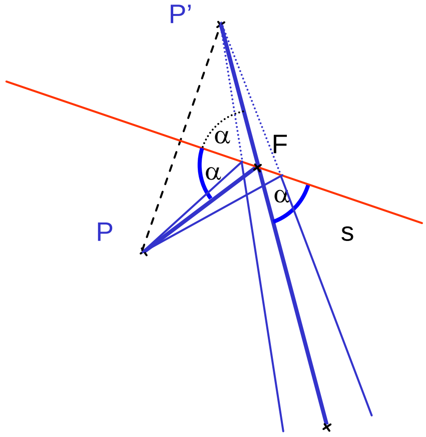
Begründung des Reflexionsgesetzes mit dem Fermat-Prinzip



Frage: Wie muss ein Lichtstrahl von P aus über die Spiegelgerade s zum Punkt A laufen, damit der Weg möglichst kurz ist?

Von P aus läuft ein Lichtstrahl zum Punkt F auf der Spiegelfläche und von dort zu Punkt A. F ist so zu bestimmen, dass die gesamte Weglänge
$|\overline{PF}|+|\overline{FA}|$ möglichst kurz wird.
Dazu legen wir P' so fest, dass s die Mittelsenkrechte zu $\overline{PP'}$ ist. Damit ist
$|\overline{PF}|=|\overline{P'F}|$, und deshalb die gesamte Weglänge
$|\overline{PF}|+|\overline{FA}|=|\overline{P'F}|+|\overline{FA}|$.
Die Weglänge ist dann minimal, wenn F auf der Strecke $\overline{P'A}$ liegt, in allen anderen Fällen ist $|\overline{P'F}|+|\overline{FA}|>|\overline{P'A}|$, da in jedem Dreieck die Summe von zwei Seitenlängen größer als die Länge der dritten Seite ist.

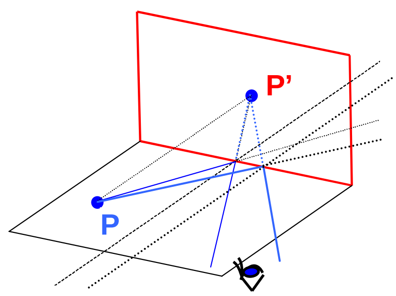
Daraus folgt das **Reflexionsgesetz**:



- Einfallender Strahl, Lot und reflektierter Strahl liegen in einer Ebene (Einfallsebene) senkrecht zur Spiegelebene
- Einfallswinkel und Reflexionswinkel sind gleich.

Nach dem Fermat-Prinzip verläuft Licht zwischen den Punkten P und A über die Spiegelfläche s so, dass es geradlinig vom konstruierten Punkt P' herzukommen scheint, da dies der kürzest mögliche Weg ist.
Betrachtet man mehrere Strahlen, die vom Punkt P ausgehen, dann zeigt sich:

- Die reflektierten Strahlen ***scheinen*** für das Auge ***alle*** von ***einem*** Punkt P' herzukommen, der auf der anderen Seite des Spiegels auf dem Lot durch P im gleichen Abstand wie P liegt.



Beschränken wir uns auf die Betrachtung der Einfallsebene, dann wird die Spiegel***ebene*** wird zur Spiegel***achse***.

So ergibt sich aus der **Räumlichen Spiegelung** der Physik die **Geradenspiegelung** in der Mathematik.

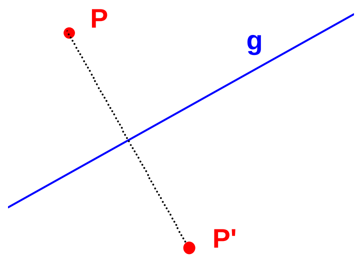
b) Definition der Geradenspiegelung

Beispiele für handelndes Durchführen von Geradenspiegelungen:

- Falten und Klecksen; Falten und Schneiden; Falten und Kohlepapier; Falten und Durchstechen
- kariertes Papier

Definition 2.1
Es sei g eine Gerade der Ebene E.
Eine Abbildung $S_g : E \to E$ heißt Geradenspiegelung (Achsenspiegelung)
$\Leftrightarrow$ für jeden Punkt P und seinen Bildpunkt P' gilt:
Ist $P \notin g$, so ist g die Mittelsenkrechte von $\overline{PP'}$
Ist $P \in g$, so ist P' = P.

Eigenschaften einer Geradenspiegelung S_g:



Die Umkehrabbildung einer Geradenspiegelung S_g ist die selbe Geradenspiegelung S_g : $\mathbf{S_g^{-1} = S_g}$

Ein Punktepaar (P,P') $(P \neq P')$ legt die Abbildung eindeutig fest.

Zu zwei verschiedenen Punkten P, Q gibt es genau eine Achsenspiegelung S_g mit $S_g(P)=Q$.

Fixelemente von S_g:

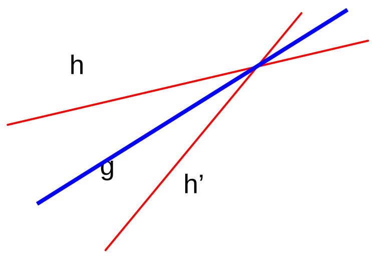
Fixpunkte: alle Punkte von g
Fixpunktgerade: g
Fixgeraden: g; alle Senkrechten zu g

Invarianten:

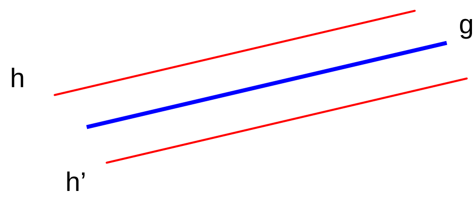
geradentreu
längentreu
winkelmaßtreu
flächeninhaltstreu
***nicht** umlaufsinntreu*

Weitere, hieraus und aus der Definition beweisbare Eigenschaften einer Geradenspiegelung S_g ($\to$ Übungen)

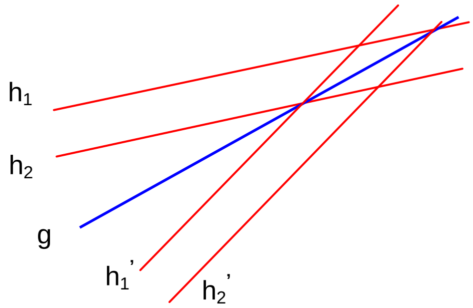
Ist $h \nparallel g$, so schneiden sich h und h' auf g und g halbiert den Winkel zwischen h und h'.



Ist $h \parallel g$, so ist g Mittelparallele des von h und h' begrenzten Parallelstreifens.



Ist $h_1 \parallel h_2$, so ist auch $h_{1'} \parallel h_{2'}$.



Geradenspiegelungen sind „parallelentreu“

Bemerkung: Die Geradentreue und lässt sich nicht ohne weiteres aus der Definition und den in Kapitel 1 genannten „Axiomen“ ableiten, sondern müsste als neues „Axiom“ gefordert werden. Die Längentreue und Winkelmaßtreue dagegen könnte man ableiten.

2.2 Definition und Eigenschaften von Kongruenzabbildungen

Definition 2.2
Eine Abbildung f: E → E heißt Kongruenzabbildung
⇔ f ist bijektiv, geradentreu, längentreu.

Satz 2.1
Jede Geradenspiegelung ist eine Kongruenzabbildung.

Satz 2.2
Die Verkettung von zwei Geradenspiegelungen ist eine Kongruenzabbildung.

Folgende Probleme im Zusammenhang mit Kongruenzabbildungen sollen behandelt werden:

- Gibt es außer den Achsenspiegelungen noch weitere Kongruenzabbildungen?
- Welche Typen können das sein? Kann man sie einfach klassifizieren?
- Welche Typen von Kongruenzabbildungen erhält man, wenn man mehrere Achsenspiegelungen hinter einander ausführt?

Bevor wir uns mit der Verkettung von Achsenspiegelungen im Einzelnen befassen, sollen noch einige Eigenschaften von Kongruenzabbildungen bewiesen werden. Dabei verwenden wir wiederum alle in Kapitel 1.6 aufgeführten „Axiome“.

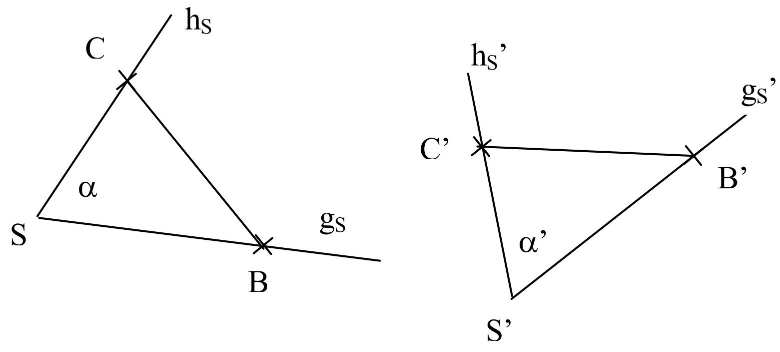
Satz 2.3
Die Verkettung von zwei Kongruenzabbildungen ist eine Kongruenzabbildung.

Satz 2.4
Jede Kongruenzabbildung ist winkelmaßtreu und flächeninhaltstreu.

Beweis:

Winkeltreue:

Durch die Halbgeraden g_S, h_S sei ein Winkel α gegeben, der Bildwinkel α' sei $\angle g_S', h_S'$. Wähle auf g_S einen Punkt B und auf h_S einen Punkt C. Für das Bilddreieck S'B'C' ist wegen der Längentreue der Kongruenzabbildungen $\overline{SB} = \overline{S'B'}$, $\overline{BC} = \overline{B'C'}$, $\overline{CS} = \overline{C'S'}$. Damit stimmen die Dreiecke auch in allen Winkeln überein und insbesondere ist $\alpha'=\alpha$.



Flächeninhaltstreue:

Wir zeigen im Vorgriff auf die späteren Ausführungen zum Flächeninhaltsbegriff, dass der Flächeninhalt von Rechtecken erhalten bleibt, da alle Flächeninhalte mit Hilfe von Rechtecken gemessen werden.
Das Bild eines Rechtecks ABCD ist wieder ein Rechteck, da Kongruenzabbildungen winkelmaßtreu sind. Die Seitenlängen des Bildrechtecks A'B'C'D' stimmen wegen der Längentreue mit denen von ABCD überein und daher ist auch der Flächeninhalt der gleiche.

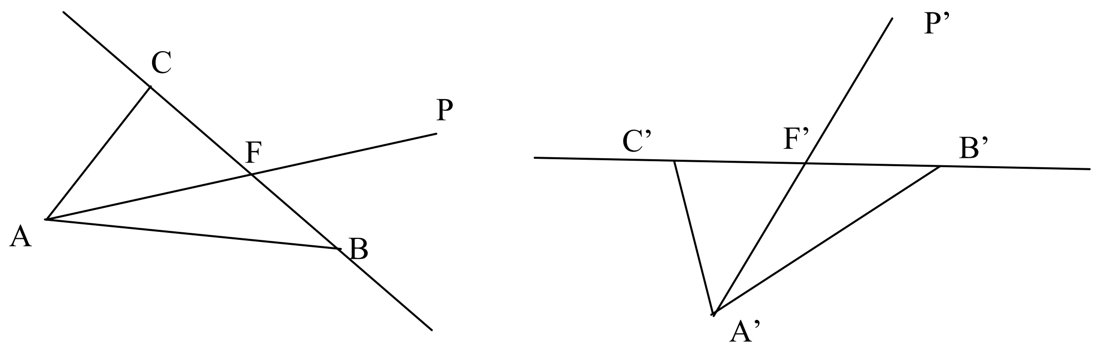
Satz 2.5
Jede Kongruenzabbildung ist parallelentreu.

Beweis:
Folgt unmittelbar aus der Geradentreue und der Bijektivität von Kongruenzabbildungen (Übungsaufgabe).

Satz 2.6
Durch das Abbilden eines einzigen Dreiecks ist eine Kongruenzabbildung eindeutig festgelegt.

Beweis[1]:
Das Bild eines (nicht ausgearteten) Dreiecks ABC sei A'B'C'. Sei P ein *beliebiger* Punkt der Ebene. Wir müssen zeigen, dass das Bild von P eindeutig festgelegt ist. Dazu zeichnen wir die Gerade AP (für $P \neq A$).

1.Fall: AP schneidet die Gerade BC in einem Punkt F. Der Bildpunkt F' von F liegt auf B'C' und ist eindeutig bestimmt, da wegen der Geradentreue und Längentreue $\overline{BF} = \overline{B'F'}$ und $\overline{CF} = \overline{C'F'}$. P' muss auf A'F' liegen. Wegen der Längentreue ist $\overline{F'P'} = \overline{FP}$, und damit ist P' eindeutig bestimmt.



Übung: Zeichnen Sie Skizzen, bei denen F nicht zwischen B und C liegt und prüfen, Sie, ob dann die Argumentation oben ebenfalls richtig ist. Zeichnen Sie Skizzen für viele verschiedene Lagen von F

2.Fall: AP schneidet die Gerade BC nicht. $\Rightarrow$ Übung.
3.Fall: P=A. AP ist nicht definiert. Wegen P'=A' ist P' wiederum eindeutig festgelegt.

[1] Dieser Satz gilt sogar ganz allgemein für bijektive, geradentreue Abbildungen der Ebene.

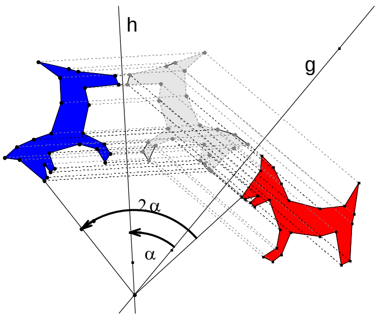
2.3 Hintereinanderausführen von 2 Achsenspiegelungen[2]

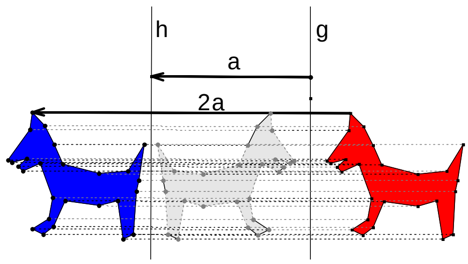
Satz 2.7
Die Hintereinanderausführung von 2 Achsenspiegelungen ist eine Drehung oder eine Verschiebung.

Dabei gilt:

Schneiden sich die beiden Achsen in Z unter $\angle\alpha$, so lässt sich die Zweifachspiegelung durch eine Drehung um Z um $\angle 2\alpha$ ersetzen.
Dabei legt die Reihenfolge der Achsenspiegelungen den Winkel fest: α ist der Winkel, der überstrichen wird, wenn die erste Spiegelachse im Gegenuhrzeigersinn auf die zweite Spiegelachse gedreht wird.

Sind die beiden Achsen parallel im Abstand a, so lässt sich die Zweifachspiegelung durch eine Verschiebung um 2a senkrecht zur Achsenrichtung ersetzen.
Dabei legt die Reihenfolge der Achsenspiegelungen die Richtung der Verschiebung fest: Die Verschiebung erfolgt von der ersten Spiegelachse auf die zweite Spiegelachse zu.





Beweis von Satz 2.7:

Gegeben sei die Verkettung der Spiegelung S_g mit S_h .

1. Fall: Die beiden Spiegelachsen g und h fallen zusammen.

Dann ist $S_g = S_h$ und damit $S_g \circ S_h = id$. id kann man als Spezialfall einer Drehung um 0° oder einer Verschiebung um den Nullvektor auffassen.

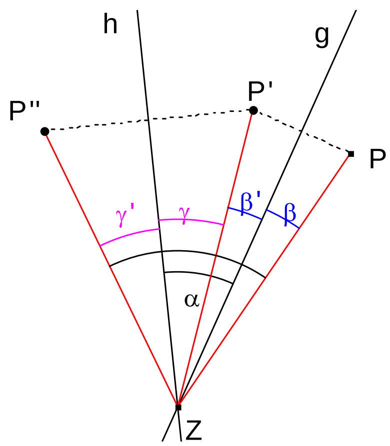
2.Fall: Die beiden Spiegelachsen g und h schneiden sich in einem Punkt Z unter dem Winkel α.
Dabei ist α der Winkel, der überstrichen wird, wenn man g im Gegenuhrzeigersinn auf h dreht.

Sei P ein beliebiger Punkt, $P' = S_g(P)$ und $P'' = S_h(P')$. Wir untersuchen, wie sich P'' aus P ergibt.

Behauptung: P'' geht aus P durch Drehung um den Punkt Z um den Winkel 2α hervor.

Wir müssen alle möglichen Lagen von P, P' und P'' bezüglich der Achsen g und h betrachten.

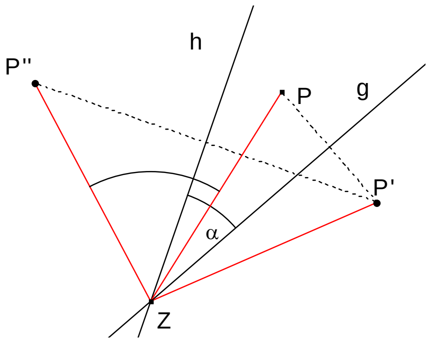
1. Unterfall:
P liegt so, dass P' und P'' wie in der nebenstehenden Abbildung liegen.
1.Behauptung: P, P' und P'' liegen auf einem Kreisbogen um Z.
Klar, da wegen der Längentreue von S_g und S_h gilt
$\overline{ZP} = \overline{ZP'} = \overline{ZP''}$.



[2] Die Definitionen von Verschiebung und Drehung finden sich auf S. 25 ff

2.Behauptung: $\angle$ PZP’’ = 2α .
Wegen der Winkeltreue von S_g und S_h ist β=β’ und γ=γ’.
Da α=β’+γ = β+γ und
$\angle$ PZP’’= β+β’+γ+γ’ folgt
$\angle$ PZP’’= β+β+γ+γ = 2(β+γ) = 2α.

Weitere Unterfälle:
Andere Lagen von P, P’, P’’ wie z.B. in der nebenstehenden Abbildung. → Übungsaufgabe



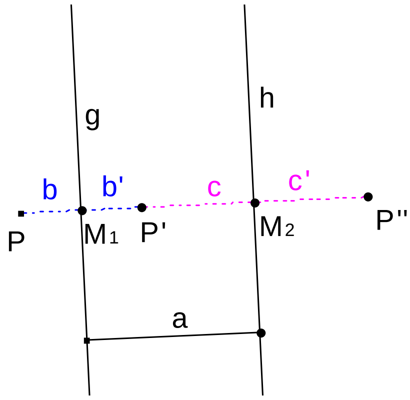
Da der Winkel α nur von der gegenseitigen Lage der Achsen g und h abhängt (nicht aber von der Lage des Punktes P), folgt, dass die Drehung immer um den *gleichen* Winkel 2α erfolgt.

3.Fall: Die beiden Spiegelachsen g und h sind parallel und verschieden und haben den Abstand a.
Sei P ein beliebiger Punkt, P’= S_g(P) und P’’= S_h(P’). Wir untersuchen, wie sich P’’ aus P ergibt.

Behauptung: P’’ geht aus P durch Verschiebung um 2a in der Richtung senkrecht von g nach h hervor.

Wir müssen alle möglichen Lagen von P, P’ und P’’ bezüglich der Achsen g und h betrachten.

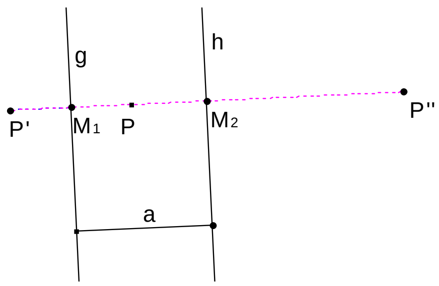
1. Unterfall:
P liegt so, dass P’ und P’’ wie in der nebenstehenden Abbildung liegen.



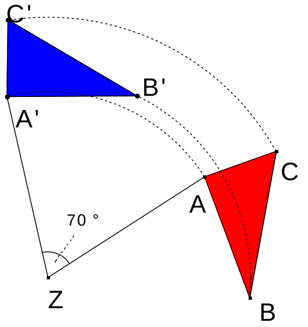
1.Behauptung:P, P’ und P’’ liegen auf einer Senkrechten zu den Achsen g und h.
Klar nach Definition der Achsenspiegelung.

2.Behauptung: $\overline{PP''} = 2a$.
Nach Definition der Achsenspiegelung ist b = $\overline{PM_1} = \overline{M_1P'}$ =b’
und c = $\overline{P'M_2} = \overline{M_2P''}$= c’ . Da a = b’+c ist, folgt
$\overline{PP''}$= 2b+2c=2a .

Weitere Unterfälle:
Andere Lagen von P, P’, P’’ wie z.B. in der nebenstehenden Abbildung. → Übungsaufgabe



Auch die Umkehrung von Satz 2.7 gilt!
Jede **Drehung** $D_{Z,\alpha}$ lässt sich durch eine **Doppelspiegelung** ersetzen. Dabei müssen sich die beiden Spiegelachsen in Z unter $\angle \frac{1}{2}\alpha$ schneiden.
Jede **Verschiebung** v lässt sich durch eine **Doppelspiegelung** an parallelen Achsen im Abstand $\frac{1}{2}\overrightarrow{v}$, senkrecht zu v, ersetzen.
Orientierung des Winkels bzw. Verschiebungsrichtung beachten!



Konstruieren Sie für die gezeigten Abbildungen jeweils solche Achsen.
Welche Bedingungen müssen dafür gelten?

Aufgabe

Konstruieren Sie Achsen für zwei Geradenspiegelungen, deren Verkettung eine Drehung um 90° (180° , 45°) ergibt. Überprüfen Sie durch Ausführen der Spiegelungen eines Dreiecks, dass sich tatsächlich jeweils die erwartete Drehung ergibt.

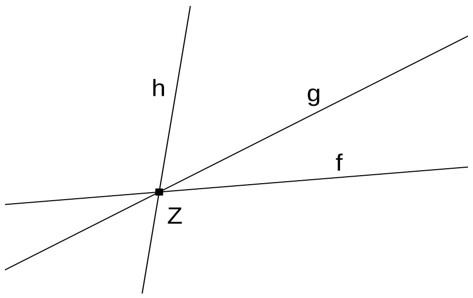
Aufgabe

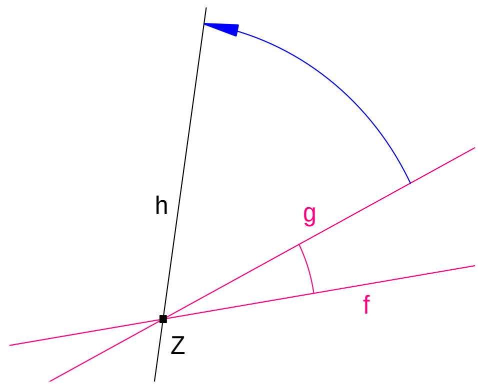
Der Winkel $\angle f,g$ zwischen f und g sei 30°, der Winkel $\angle g,h$ sei 70°.
Die Doppelspiegelung $S_f \circ S_g$ soll durch zwei andere Achsen dargestellt werden, deren eine h ist.
Konstruieren Sie die zweite Achse.

2.4 Hintereinanderausführen von 3 Achsenspiegelungen

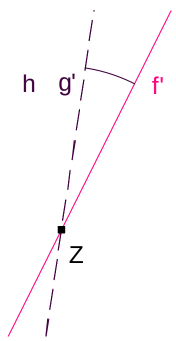
Nachdem wir die Verkettung von zwei Achsenspiegelungen vollständig geklärt haben, wollen wir nun die Verkettung von drei Achsenspiegelungen untersuchen. Die Zahl der zu untersuchenden Fälle von gegenseitiger Lage der Achsen zueinander ist hier natürlich viel größer als zuvor.

1.Fall: Die Achsen schneiden sich in einem Punkt.





Die Drehung des Achsenpaares (f,g) um Z ändert die Verkettung $S_f \circ S_g$ nicht, wenn der eingeschlossene Winkel gleich bleibt.

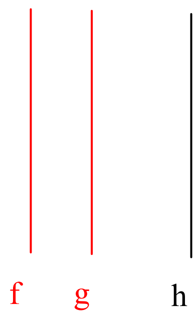


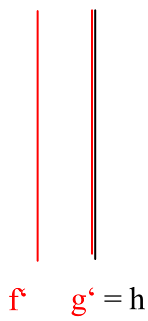
$$\begin{aligned} S_f \circ S_g \circ S_h &= (S_f \circ S_g) \circ S_h = \\ (S_{f'} \circ S_{g'}) \circ S_h &= S_{f'} \circ (S_{g'} \circ S_h) = \\ S_{f'} \circ \mathrm{id} &= S_{f'} \end{aligned}$$

$\Rightarrow$ ***eine* Achsenspiegelung an f'**

Beachten Sie, dass die Reihenfolge der Achsenspiegelungen eine Rolle spielt (kein Kommutativgesetz), die paarweise Zusammenfassung aber nicht (Assoziativgesetz).

2.Fall: Die 3 Achsen sind parallel.

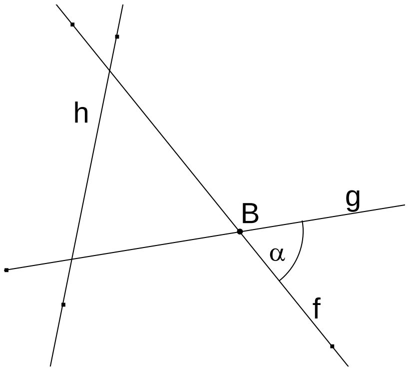




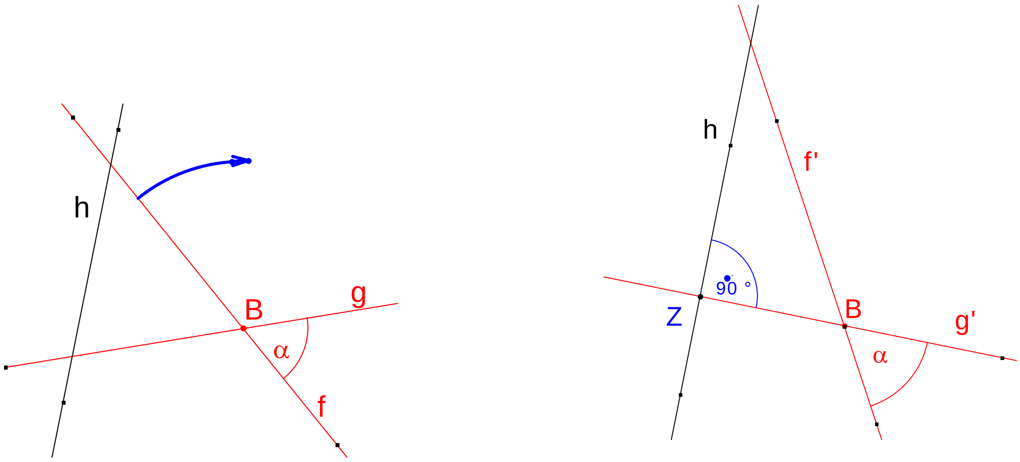
Die Verschiebung des Achsenpaares (f,g) ändert die Verkettung $S_f \circ S_g$ nicht.

$S_f \circ S_g \circ S_h = (S_f \circ S_g) \circ S_h = (S_{f'} \circ S_{g'}) \circ S_h = S_{f'} \circ (S_{g'} \circ S_h) = S_{f'} \circ \mathrm{Id} = S_{f'}$ $\Rightarrow$ ***eine* Achsenspiegelung $S_{f'}$ an f'**

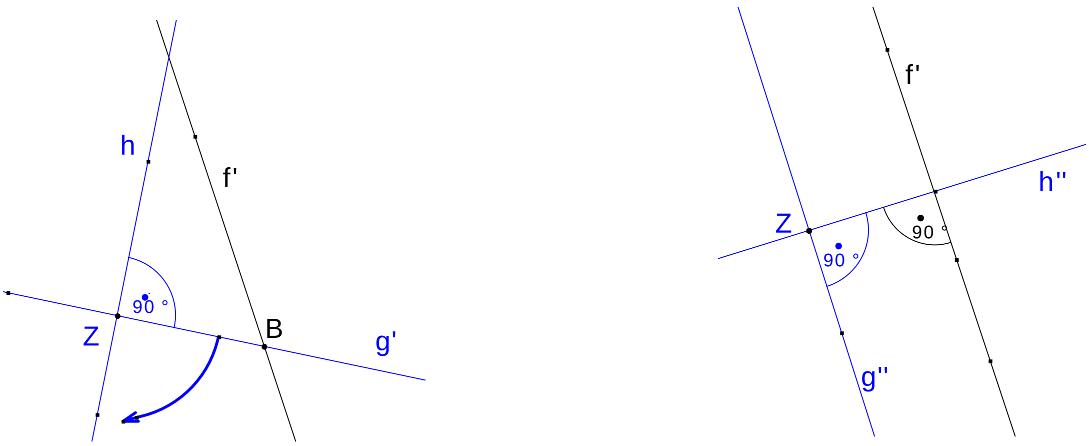
3.Fall: Die Achsen bilden ein Dreieck.



1. Drehung von (f,g) um B so, dass g‘ ⊥ h , Z Schnittpunkt von g’ und h.



2. Drehung von (g‘,h) um Z so, dass h‘‘ ⊥ f‘



$S_f \circ S_g \circ S_h = (S_f \circ S_g) \circ S_h = (S_{f'} \circ S_{g'}) \circ S_h = S_{f'} \circ (S_{g'} \circ S_h) = S_{f'} \circ (S_{g''} \circ S_{h''}) = (S_{f'} \circ S_{g''}) \circ S_{h''}$

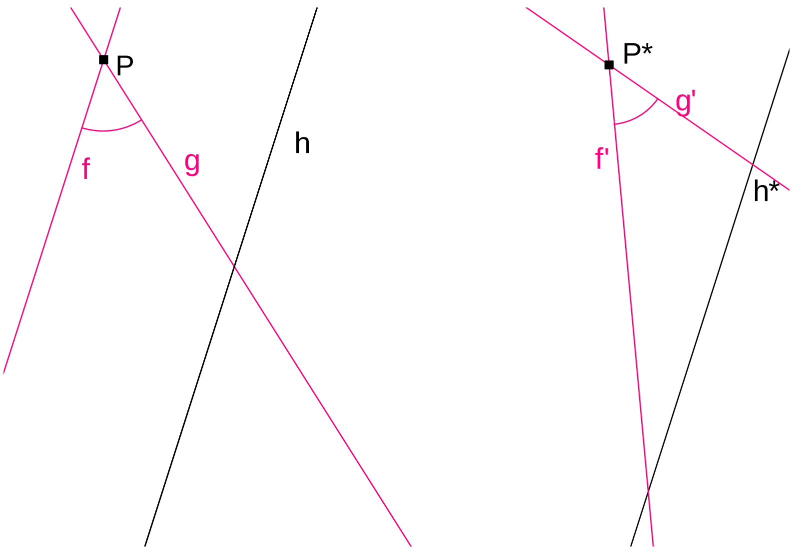
$(S_{f'} \circ S_{g''})$ ist Verschiebung parallel zur Spiegelachse h’’ , danach wird eine Spiegelung an h’’ durchgeführt

⇒ Verschiebung gefolgt von einer Achsenspiegelung.
Solche Kongruenzabbildungen wollen wir als „**Schubspiegelung**“ bezeichnen.

Beachten Sie bei diesem Verfahren, dass man nur solche Achsenpaare um ihren Schnittpunkt drehen darf, die zu Spiegelungen gehören, die unmittelbar hintereinander ausgeführt werden; also hier nur (f,g) oder (g,h)

4.Fall: 2 Achsen sind parallel.

1. Unterfall: f || h.



Drehen von Achsenpaar (f,g) um ihren Schnittpunkt P $\Rightarrow$ Lage wie im 3.Fall
$\Rightarrow$ **Schubspiegelung**

2. Unterfall: f || g $\rightarrow$ Übung

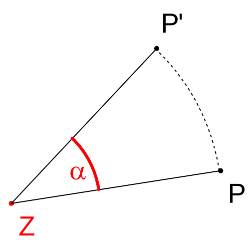
Damit haben wir bewiesen:

Satz 2.8:
Die Hintereinanderausführung von 3 Achsenspiegelungen ist eine Achsenspiegelung oder eine Schubspiegelung.

2.5 Drehungen

Die bislang als Verkettung von Achsenspiegelungen gewonnenen Kongruenzabbildungen Drehung, Verschiebung und Schubspiegelung sollen jetzt jeweils noch auf andere Art definiert werden.

Definition 2.3
Es sei Z ein Punkt der Ebene E, α eine Winkelgröße.
Eine Abbildung $D_{Z,\alpha}$: E $\rightarrow$ E heißt Drehung
$\Leftrightarrow$ für jeden Punkt P und seinen Bildpunkt P' gilt:
$\overline{P'Z} = \overline{PZ}$
$\angle$ PZP' = α
Ist P = Z, so ist P' = Z = P.



Eigenschaften einer Drehung $D_{Z,\alpha}$:

$D_{Z,\alpha}{}^{-1} = D_{Z,-\alpha} = D_{Z,360°-\alpha}$
2 verschiedene Punktepaare (P,P'), (Q,Q') legen die Abbildung eindeutig fest *(falls existent)*.

Fixelemente von $D_{Z,\alpha}$ (für $\alpha \neq 0°$):

Fixpunkte: Z .
Fixpunktgeraden: keine.
Fixgeraden: keine (für $\alpha \neq 0°$, $\alpha \neq 180°$).

Invarianten:

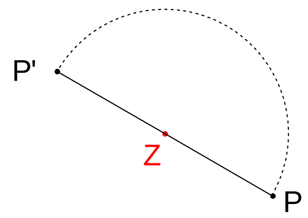
geradentreu,
längentreu,
winkelmaßtreu,
flächeninhaltstreu,
umlaufsinntreu.

Weitere, hieraus und aus der Definition beweisbare Eigenschaften:

Ist $Z \in g$, so ist $Z \in g'$,
Gerade und Bildgerade haben von Z denselben Abstand,
Gerade und Bildgerade schneiden sich unter α (Begründung?).

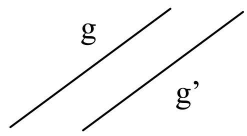
Punktspiegelung (Sonderfall der Drehung; Drehwinkel $\alpha = 180°$)

Definition 2.4
Sei Z ein Punkt der Ebene E.
Eine Abbildung heißt Punktspiegelung an Z
$\Leftrightarrow$ für jeden Punkt P und seinen Bildpunkt P' gilt:
Ist P = Z, so ist P' = Z = P ,
sonst halbiert Z die Strecke $\overline{PP'}$.



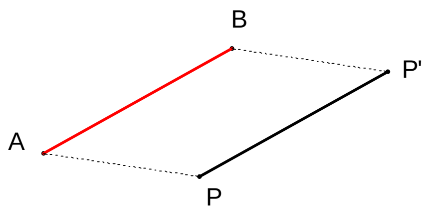
Zusätzliche Eigenschaften einer Punktspiegelung (gegenüber den Eigenschaften einer beliebigen Drehung):

$D_{Z,180}{}^{-1} = D_{Z,180}$,
$D_{Z,180}$ liegt durch ***ein*** Punktepaar (P,P') eindeutig fest (falls $P \neq P'$),
alle Geraden durch Z sind Fixgeraden,
$g' \parallel g$ (Originalgerade und Bildgerade sind parallel). Begründungen?



2.6 Verschiebungen

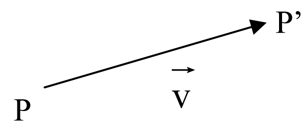
Definition 2.5
Es seien A, B zwei verschiedene Punkte der Ebene E.
Eine Abbildung $V_{A,B}: E \to E$ heißt Verschiebung um $\overrightarrow{AB}$
$\Leftrightarrow$ für alle Punkte P der Ebene gilt:
- liegt P auf der Geraden AB, so auch P';
und $\overline{PP'}$ und $\overline{AB}$ sind gleichlang und gleichgerichtet.
- Sonst bilden die Punkte ABP'P
(in dieser Reihenfolge) ein Parallelogramm.



Eigenschaften:

$V_{A,B}{}^{-1} = V_{B,A}$

Eine Verschiebung liegt durch 1 Punktepaar (P,P') eindeutig fest.
Wir veranschaulichen die durch das Punktepaar (P,P') festgelegte Verschiebung oft durch einen Pfeil $\overrightarrow{PP'} = \vec{v}$ von P nach P' und schreiben auch $V_{\vec{v}}$.



Fixelemente von $V_{A,B}$: (für $A \neq B$)

keine Fixpunkte,
alle Geraden parallel zu AB sind Fixgeraden.

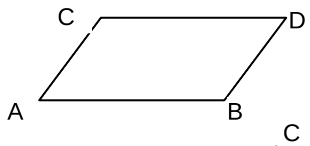
Invarianten:

geradentreu
winkelmaßtreu
längentreu
flächeninhaltstreu
Umlaufsinn bleibt erhalten

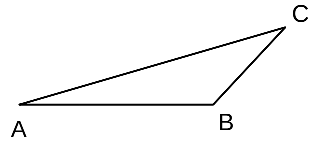
Zusätzliche Eigenschaft:

g' || g (d.h. Originalgerade und Bildgerade sind parallel). Begründung?

Aufgabe



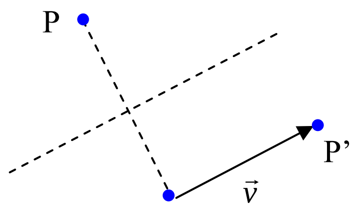
(a) ABDC sei ein Parallelogramm. Zeigen Sie mit Hilfe der Definition 2.5, dass gilt $V_{A,B} = V_{C,D}$.



(b) Zeigen Sie mit Hilfe der Definition 2.5, dass für die Verkettung von zwei Verschiebungen gilt $V_{A,B} \circ V_{B,C} = V_{A,C}$.

2.7 Schubspiegelungen (Gleitspiegelungen)

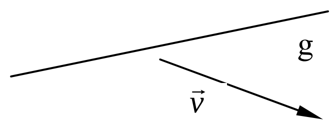
Definition 2.6
Schubspiegelungen sind Abbildungen, die aus dem Hintereinanderausführen einer Verschiebung und einer Achsenspiegelung bestehen. Dabei liegt die Spiegelachse parallel zur Verschiebungsrichtung.



- Schubspiegelungen kann man durch die Verkettung von Spiegelungen an 3 Achsen darstellen, von denen die ersten beiden parallel zueinander sind und die dritte senkrecht dazu ist.
- Man kann die Reihenfolge von Verschiebung und Achsenspiegelung vertauschen, wenn die Verschiebung parallel zur Spiegelachse verläuft: $V_{\vec{v}} \circ S_g = S_g \circ V_{\vec{v}}$.

Aufgabe

Beweisen Sie, dass die Verkettung einer Achsenspiegelung mit einer Verschiebung immer eine Schubspiegelung ist (auch wenn die Verschiebung nicht parallel zur Spiegelachse verläuft) und führen Sie die Konstruktion der Spiegelachse und des Verschiebungsvektors für einige Beispiele durch.



Beachten Sie: In diesem Fall kann man die Achsenspiegelung und die Verschiebung nicht vertauschen. Wir vereinbaren hier: Zuerst die Achsenspiegelung S_g, dann die Verschiebung.Aufgabe

Was ist die zur Schubspiegelung $V_{\vec{v}} \circ S_g$ inverse Abbildung?

2.8 Kongruenzabbildungen - Produkte von Achsenspiegelungen

Mit der bisherigen Vorarbeit sind wir in der Lage, die angestrebte Klassifizierung aller Kongruenzabbildungen vorzunehmen.

Wir geben nochmals eine kurze Zusammenfassung des bisherigen Vorgehens:

- Zunächst werden Kongruenzabbildungen als bijektive, geradentreue, längentreue Abbildungen der Ebene definiert.
- Achsenspiegelungen erweisen sich als Kongruenzabbildungen.
- Verkettung von Achsenspiegelungen sind Kongruenzabbildungen.
- Jede Kongruenzabbildung ist durch die Abbildung eines Dreiecks eindeutig festgelegt.
- Wir wissen, welche Abbildungstypen sich durch die Verkettung von höchstens 3 Achsenspiegelungen ergeben:
  Achsenspiegelung bei 1 Achse (gegensinnige Abbildung),
  Drehung oder Verschiebungen bei 2 Achsen (gleichsinnige Abbildung),
  Schubspiegelung oder Achsenspiegelung bei 3 Achsen (gegensinnige Abbildung).

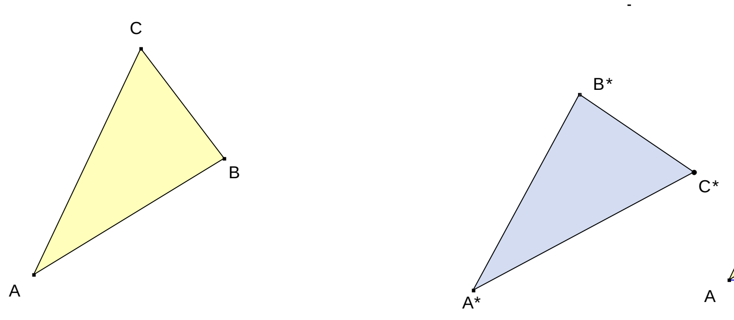
Wir wollen nun zeigen, dass sich auch jede Kongruenzabbildung durch höchstens 3 Achsenspiegelungen darstellen lässt. Dazu beweisen wir zunächst den folgenden Satz.

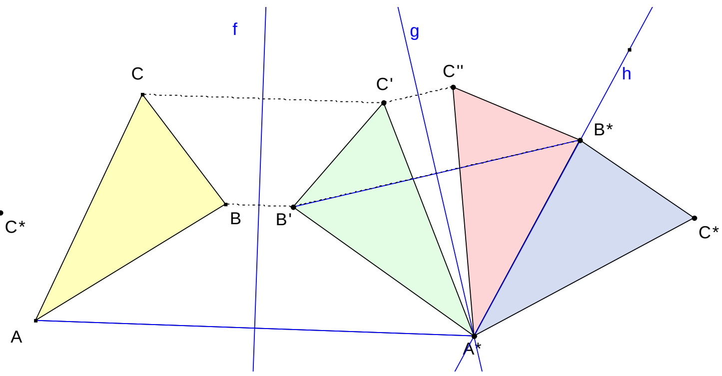
Satz 2.9
Gegeben seien zwei Dreiecke ABC und A*B*C* mit gleich langen Seiten.
Dann lässt sich Dreieck ABC auf Dreieck A*B*C* durch eine Verkettung von höchstens 3 Achsenspiegelungen abbilden.

Beweis:
Gegeben sei ein Dreieck ABC und ein dazu kongruentes Dreieck A*B*C*.
Anzugeben ist ein Produkt von 1, 2 oder 3 Achsenspiegelungen, welches ABC auf A*B*C* abbildet.
Idee: Angabe von Achsenspiegelungen (oder von identischen Abb.) mit den Eigenschaften

f: $A \mapsto A^*$,	$(B \mapsto B', \; C \mapsto C')$	
g: $B' \mapsto B^*$; A^* bleibt fest,	$(C' \mapsto C'')$	warum gibt es eine solche Spiegelung?
h: $C'' \mapsto C^*$; A^* und B^* bleiben fest.		warum gibt es eine solche Spiegelung?

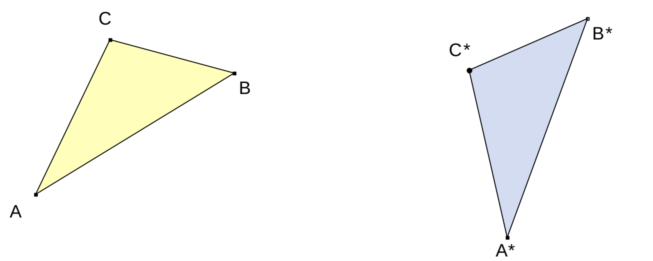
Ausgangsdreiecke $\Rightarrow$ Konstruktion der Achsenspiegelungen





Aufgabe

Führen Sie für die nebenstehenden Ausgangsdreiecke dieselbe Konstruktion der Spiegelachsen durch.



Satz 2.10
Jede Kongruenzabbildung lässt sich als Einfach-, Zweifach- oder Dreifachspiegelung darstellen.

Beweis
Zu einer gegebenen Kongruenzabbildung f wählt man ein beliebiges Dreieck ABC aus. f bildet ABC auf das Dreieck A*B*C* mit gleichen Seitenlängen wie ABC ab. Nach Satz 2.9 kann man das Dreieck ABC durch eine Verkettung g von ≤ 3 Achsenspiegelungen auf A*B*C* abbilden. Da diese Verkettung g eine Kongruenzabbildung ist und wegen Satz 2.6 Kongruenzabbildungen durch das Bild eines Dreiecks eindeutig bestimmt sind folgt, dass f gleich g ist, also durch ≤ 3 Achsenspiegelungen dargestellt werden kann.

Satz 2.11
Die Verkettung von beliebig vielen Achsenspiegelungen lässt sich auf eine Verkettung von ≤ 3 Achsenspiegelungen reduzieren. (Dreispiegelungssatz)

Beweis
Einfache Folgerung aus Satz 2.10.

Satz 2.12
Jede Kongruenzabbildung ist von einem der Typen
- **Achsenspiegelung,**
- **Drehung,**
- **Verschiebung,**
- **Schubspiegelung.**

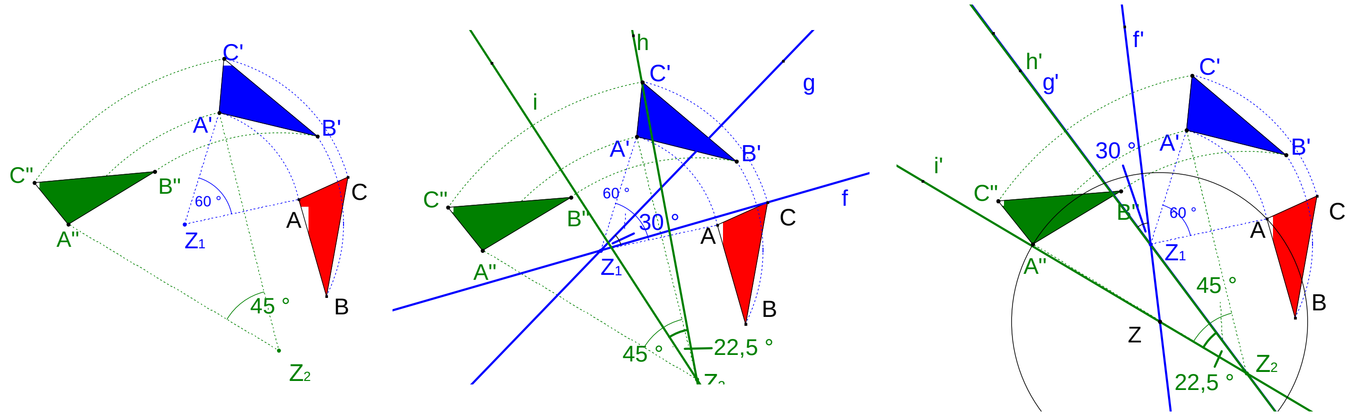
Beweis
Einfache Folgerung aus Satz 2.10. und der Analyse der Verkettung von ≤ 3 Achsenspiegelungen.

2.9 Hintereinanderausführen von 4 und mehr Geradenspiegelungen

Im vorangehenden Abschnitt haben wir allgemein gezeigt, dass sich Verkettungen von beliebig vielen Achsenspiegelungen auf die Verkettung von ≤ 3 Achsenspiegelungen zurückführen lassen. Wir haben bei diesem Nachweis nicht gezeigt, wie sich diese Achsenspiegelungen aus den gegebenen Achsenspiegelungen ergeben. Die soll nun an zwei Beispielen konkret gezeigt werden. Wir untersuchen exemplarisch die Verkettung von 2 Drehungen und die Verkettung von zwei Verschiebungen. Wir verwenden wieder die zuvor schon mehrfach angewandte Methode der „Elimination von Spiegelachsen“. Die Übertragung dieser Methode auf weitere Fälle (etwa die Verkettung einer Drehung und einer Verschiebung) möge als Übungsaufgabe dienen.

Verkettung von zwei Drehungen

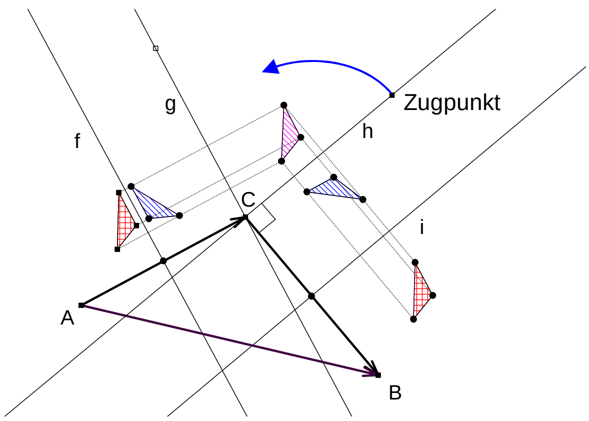
Gegeben seien zwei Drehungen um verschiedene Drehzentren Z_1 und Z_2 mit den Drehwinkeln α_1 und α_2 . Die Verkettung der Drehungen kann durch 4 Achsenspiegelungen $(S_f \circ S_g) \circ (S_h \circ S_i)$ dargestellt werden. Hier wird die Abbildung eines Dreiecks ABC gezeigt, was nur zur besseren Veranschaulichung dient, die Angabe der Achsen alleine genügt natürlich. Die Achsenpaare (f,g) und (h,i) können wieder um ihren jeweiligen Schnittpunkt unter Beibehaltung des eingeschlossenen Winkels gedreht werden, so dass g’=h’ wird; es ist dann $g' = \overline{Z_1Z_2}$. Natürlich hätten wir schon zu Beginn gleich g und h so wählen können, dass sie zusammenfallen und gleich $\overline{Z_1Z_2}$ sind.



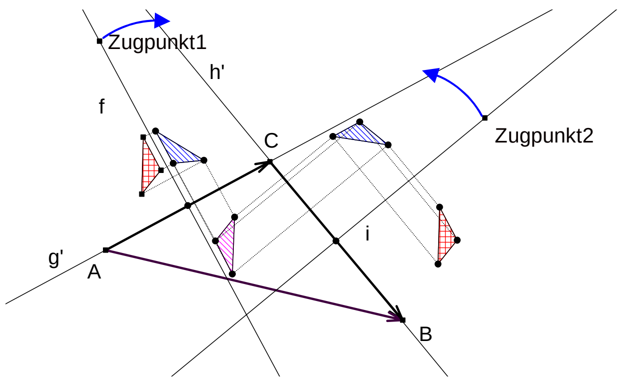
Es ist $(S_f\circ S_g)\circ(S_h\circ S_i) = (S_{f'}\circ S_{g'})\circ(S_{h'}\circ S_{i'}) = S_{f'}\circ(S_{g'}\circ S_{h'})\circ S_{i'} = S_{f'}\circ id\circ S_{i'} = S_{f'}\circ S_{i'}$.
Schneiden sich f' und i' im Punkt Z, dann ergibt sich eine Drehung um Z um $\alpha_1+\alpha_2$ (Bild), sind f' und i' parallel, dann ergibt sich eine Verschiebung. (Für welche Winkel α_1 und α_2 tritt dieser zweite Fall ein?) Selbstverständlich konnten wir schon im Voraus sagen, dass nur diese beiden Fälle eintreten konnten (warum?), der hier gegebene Nachweis gibt aber eine unmittelbare Konstruktion des Drehzentrums Z aus den Achsen der Einzeldrehungen an.

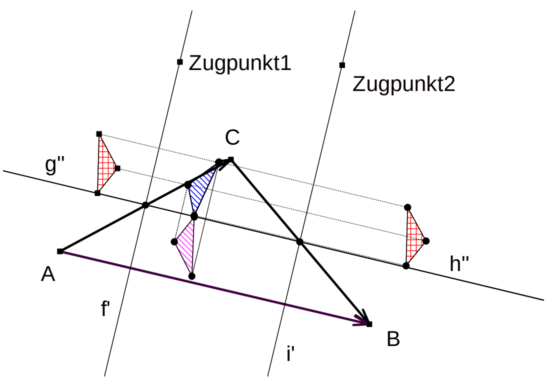
Verkettung von zwei Verschiebungen

Gegeben seien zwei Verschiebungen in verschiedene Richtungen (gleiche Richtungen: trivial), die durch $S_f \circ S_g$ und $S_h \circ S_i$ dargestellt sind. Wir zeigen, dass die Verkettung wieder eine Verschiebung ist Wir erhalten die bekannte „Vektoraddition“ für die Verschiebungen.



Drehung von (g,h) um C, so dass g' auf AC fällt





Drehung von (f,g') um den Mittelpunkt von $\overline{AC}$ und von (h',i) um den Mittelpunkt von $\overline{BC}$ so dass g'' und h'' zusammen fallen.
Formaler zusammengefasst:

$(S_f\circ S_g)\circ(S_h\circ S_i) = S_f\circ(S_g\circ S_h)\circ S_i =$
$S_f\circ(S_{g'}\circ S_{h'})\circ S_i = (S_f\circ S_{g'})\circ(S_{h'}\circ S_i) =$
$(S_{f'}\circ S_{g''})\circ(S_{h''}\circ S_{i'}) = S_{f'}\circ(S_{g''}\circ S_{h''})\circ S_{i'} =$
$S_{f'}\circ(id)\circ S_{i'} = S_{f'}\circ S_{i'}$
f' und i' sind parallel und ihr Abstand ist die Hälfte der Länge der Seite $\overline{AB}$.

Wir halten diese Ergebnisse nochmals fest.

Satz 2.13

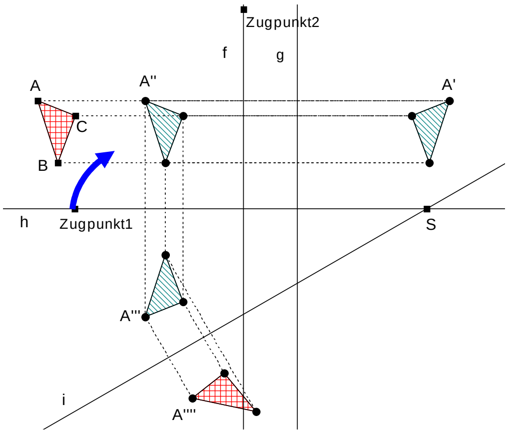
- **Die Verkettung von zwei Drehungen ist eine Verschiebung, wenn für die Drehwinkel α_1 und α_2 gilt $\alpha_1+\alpha_2=360°$, andernfalls eine Drehung um den Winkel $\alpha_1+\alpha_2$.**
- **Die Verkettung von zwei Verschiebungen ist eine Verschiebung nach den Gesetzen der Vektoraddition.**

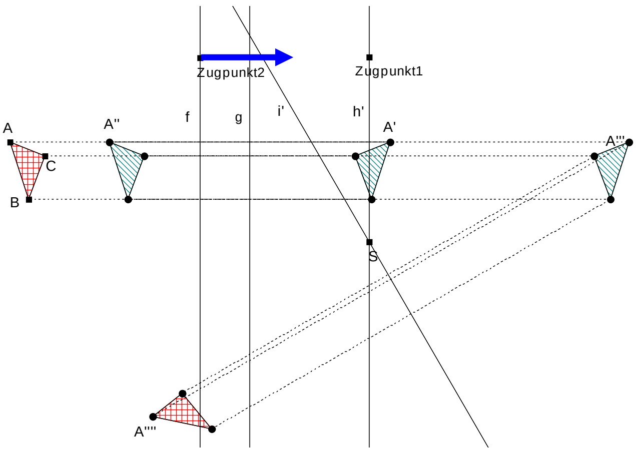
Zum Schluss wird noch ein Überblick darüber gegeben, was bei der Verkettung von 4 Achsenspiegelungen geschehen kann.

Gegeben seien die Achsenspiegelungen $S_f \circ S_g \circ S_h \circ S_i = (S_f \circ S_g \circ S_h) \circ S_i$. Folgende Fälle sind möglich:

1. $(S_f \circ S_g \circ S_h)$ ist Spiegelung: Spiegelung ∘ Spiegelung $\Rightarrow$ Drehung oder Verschiebung
2. $(S_f \circ S_g \circ S_h)$ ist Schubspiegelung: Schubspiegelung ∘ Spiegelung $\Rightarrow$ Drehung oder Verschiebung

Zu 2.: Man stellt die Schubspiegelung durch 3 Achsenspiegelungen dar und kann annehmen: $f \parallel g$ und $h \perp g$.
1.Fall: $i \parallel h$: $S_f \circ S_g$ und $S_h \circ S_i$ sind Verschiebungen. $\Rightarrow$ Verschiebung
2.Fall: Nicht $i \parallel h$. Dann kann man die Achsen h und i um ihren Schnittpunkt S drehen, so dass $h' \parallel g$ wird, und dann das Paar f, g so verschieben, dass g' mit h' zusammenfällt. $\Rightarrow$ Drehung um $f' \cap i'$.

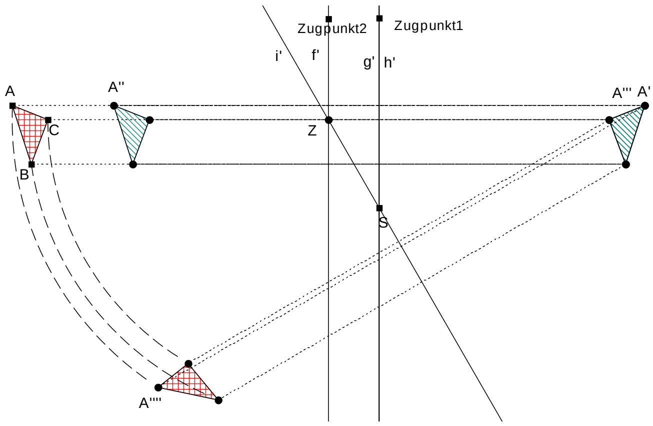




Formaler zusammengefasst:

$(S_f\circ S_g)\circ (S_h\circ S_i) = (S_f\circ S_g)\circ (S_{h'}\circ S_{i'}) =$
$(S_{f'}\circ S_{g'})\circ (S_{h'}\circ S_{i'}) = S_{f'}\circ(S_{g'}\circ S_{h'})\circ S_{i'} =$
$S_{f'}\circ(id)\circ S_{i'} = S_{f'}\circ S_{i'}$

f' und i' sind schneiden sich in einem Punkt Z.



Satz 2.14

- **Die Verkettung von 4 Achsenspiegelungen ist eine Drehung oder eine Verschiebung.**
- **Die Verkettung von 4 Achsenspiegelungen lässt sich stets ersetzen durch die Verkettung von 2 (geeigneten) Achsenspiegelungen**

Hintereinanderausführen von mehr als 4 Achsenspiegelungen:

Mit Satz 2.14 und dessen Beweis lässt sich nochmals ein Beweis für den Dreispiegelungssatz (Satz 2.11) geben, der zeigt, *wie* die Reduktion der Anzahl der Achsenspiegelungen *schrittweise* vorgenommen werden kann:

Sei n die Anzahl der Achsenspiegelungen, $n > 4$.

$S_1 \circ S_2 \circ S_3 \circ S_4 \circ ... \circ S_n = (S_1 \circ S_2 \circ S_3 \circ S_4) \circ ... \circ S_n = (S'_1 \circ S'_2) \circ ... \circ S_n$ (wegen Satz 2.14)

$\Rightarrow$ für $n \geq 4$ lässt sich die Anzahl der Achsenspiegelungen schrittweise um jeweils 2 reduzieren.

$\Rightarrow$ stets Reduktion auf maximal 1, 2 oder 3 Achsenspiegelungen möglich.