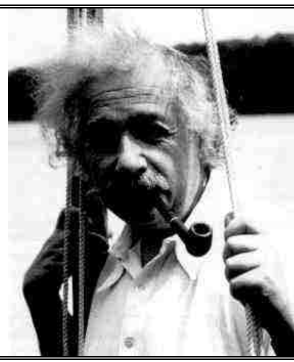
1 Hintergrund – Geschichte - Grundbegriffe

1.1 Vom Wesen der Geometrie

Empirische Wissenschaft	**Formal-logische Theorie**	
Erfahrungswissenschaft wie die Physik	Keine Begründung durch Erfahrung, keine anschaulichen Argumente	
Experimente, Beobachtungen Aussagen über die Natur	Formale Ableitung von Sätzen nach Regeln der Logik aus Axiomen (nicht weiter begründetes System von Grundtatsachen) Anschauung nur als *Hinweis* auf Beweisführungen	
Deutung der Theorie in der Welt	Grundlage für Theorien der Physik	
Schule Alltag Technik	Hochschulmathematik Vermittlung der Idee des Beweisens auch in der Schule (so genanntes lokales Ordnen)	
		
	Axiomatische Methode: Begonnen von Euklid 300 v. Chr. Buch „Elemente“	Vollendet von David Hilbert 1900 n. Chr. Buch „Grundlagen der Geometrie“

„Insofern sich die Sätze der Mathematik auf die Wirklichkeit beziehen, sind sie nicht sicher, und insofern sie sicher sind, beziehen sie sich nicht auf die Wirklichkeit.“ A. Einstein, Geometrie und Erfahrung	

1.2 "Die Elemente" des Euklid

Um 300 v. Chr. sammelt **Euklid** das grundlegende mathematische Wissen seiner Zeit und stellt es in dem Buch **Die Elemente** systematisch dar.

Er beginnt mit **Definitionen**. → vergleiche David Hilbert!

- Ein Punkt ist, was keine Teile hat.
- Eine Linie breitenlose Länge.
- Die Enden einer Linie sind Punkte.
- Eine gerade Linie (Strecke) ist eine solche, die zu den Punkten auf ihr gleichmäßig liegt.

Es folgen **Postulate.** Gefordert soll sein:

- dass man von jedem Punkt nach jedem Punkt die Strecke ziehen kann;
- dass man eine begrenzte gerade Linie zusammenhängend gerade verlängern kann.

Schließlich gibt er **Axiome** an.

- Was demselben gleich ist, ist auch einander gleich.
- Wenn Gleichem Gleiches hinzugefügt wird, sind die Ganzen gleich.

Damit lassen sich nun Probleme lösen und Theoreme beweisen.
Beispiel für ein **Problem**:

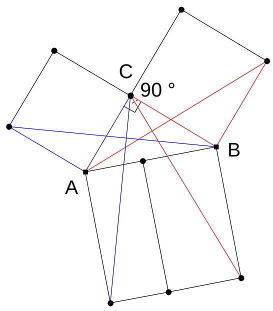
- Über einer gegebenen Strecke ein gleichseitiges Dreieck errichten.

Beispiel für ein **Theorem**:

- Wenn in einem Dreieck zwei Winkel einander gleich sind, müssen auch die den gleichen Winkeln gegenüberliegenden Seiten einander gleich sein.

Der **Satz des Pythagoras** ist Theorem 47 im 1. Buch.

Können Sie einen Beweis des Satzes von Pythagoras aus der nebenstehenden Skizze entnehmen? („Tänzerinnen-Beweis“)



1.3 David Hilbert: Geometrie als strenge axiomatische Theorie

Mehr als 2000 Jahre lang hatte sich der wissenschaftliche Aufbau der Geometrie an den "Elementen" des Euklid orientiert. Mit seinen "Grundlagen der Geometrie" setzte David Hilbert neue Maßstäbe:

- **Verzicht auf Definition der Grundbegriffe**. Sie werden vielmehr durch die Axiome als *implizit definiert* angesehen.
- **Schließung von Lücken**, etwa durch Axiome der Anordnung.
- Herausarbeitung der **Beziehung zwischen geometrischen Sätzen** und **algebraischen Eigenschaften** der zugehörigen Koordinatenbereiche.
- **Unabhängigkeit**, **Vollständigkeit** und **Widerspruchsfreiheit** als Qualitätsmerkmale des Axiomensystems.

Die geometrischen Beweise dürfen an keiner Stelle in irgendeiner Weise von der Anschauung oder von Erfahrungstatsachen Gebrauch machen, sie dürfen lediglich auf die in den Axiomen festgelegten

Beziehungen zwischen den undefinierten Grundbegriffen Bezug nehmen. Alle Beweise sollten im Prinzip so formalisiert sein, dass sie auch von einer Maschine durchgeführt werden könnten. Welche geometrischen Sätze allerdings als „wichtig“ oder „interessant“ anzusehen sind, das entscheiden aber natürlich noch immer Menschen.
Die Beweise müssen so sehr von der Anschauung losgelöst werden, dass Hilbert das klassische Zitat prägte:

"Man muss jederzeit an Stelle von 'Punkten', 'Geraden', 'Ebenen', 'Tische', 'Stühle', 'Bierseidel' sagen können."

Somit sind die Objekte der Geometrie nicht festgelegt. Hilbert konnte aber zeigen, dass alle Realisierungen seines Axiomensystems (so genannte Modelle des Axiomensystems) die gleiche Struktur besitzen, d.h. bis auf Isomorphie alle gleich sind. Solche Axiomensysteme, die bis auf Isomorphie nur ein einziges Modell besitzen, nennt man „kategorisch“.

Im Folgenden einige Auszüge aus

"Grundlagen der Geometrie"
von David Hilbert

Einleitung:
Die Geometrie bedarf - ebenso wie die Arithmetik - zu ihrem folgerichtigen Aufbau nur weniger und einfacher Grundsätze. Diese Grundsätze heißen **Axiome der Geometrie**. ....
Die bezeichnete Aufgabe läuft auf die **logische Analyse unserer räumlichen Anschauung** hinaus.
Die vorliegende Untersuchung ist ein neuer Versuch, für die Geometrie ein **vollständiges** und **möglichst einfaches System von Axiomen** aufzustellen und aus denselben die wichtigsten geometrischen Sätze in der Weise abzuleiten, dass dabei die Bedeutung der verschiedenen Axiomgruppen und die Tragweite der aus den einzelnen Axiomen zu ziehenden Folgerungen klar zutage tritt.
....

§ 1. Die Elemente der Geometrie und die fünf Axiomgruppen.

Erklärung.

Wir denken drei verschiedene Systeme von Dingen: die Dinge des ersten Systems nennen wir ***Punkte*** und bezeichnen sie mit A, B, C .... ; die Dinge des zweiten Systems nennen wir ***Geraden*** und bezeichnen sie mit a, b, c, . . .; ....

Wir denken die Punkte, Geraden, Ebenen **in gewissen gegenseitigen Beziehungen** und bezeichnen diese Beziehungen durch Worte wie "**liegen**", "**zwischen**", "**kongruent**"; die genaue und für mathematische Zwecke vollständige Beschreibung dieser Beziehungen erfolgt durch die ***Axiome der Geometrie***.

Die Axiome der Geometrie können wir in fünf Gruppen teilen; jede einzelne dieser Gruppen drückt gewisse zusammengehörige Grundtatsachen unserer Anschauung aus. Wir benennen diese Gruppen von Axiomen in folgender Weise:

I	1-8.	Axiome der *Verknüpfung*,
II	1-4.	Axiome der *Anordnung*,
III	1-5.	Axiome der *Kongruenz*,
IV		Axiom der *Parallelen*,
V	1-2.	Axiome der *Stetigkeit*.

1.4 Die axiomatische Methode: Von Euklid zu Hilbert

Wir wollen sehen, welchen Status die geometrischen Objekte in der jeweiligen Auffassung haben.

Platon, Euklid (griechische Philosophie).

Platons Auffassung von der Welt und ihrer Erfassung durch den Menschen hat die Philosophie und auch die Mathematik über viele Jahrhunderte beeinflusst..
Die Welt besteht nach Platons Auffassung aus zwei Zonen:

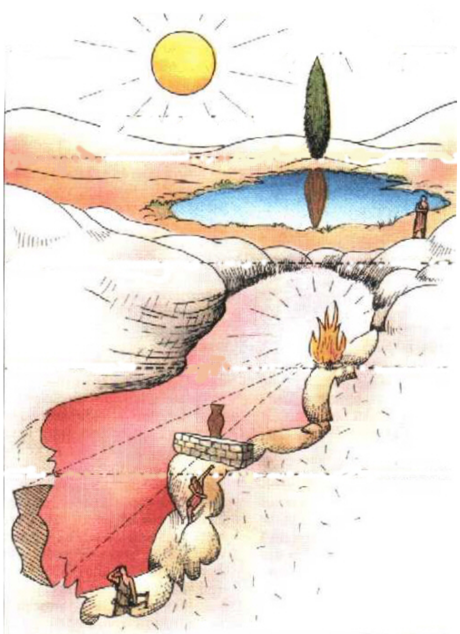
Sichtbare, erfahrbare Welt	Welt der idealen Dinge
Die Sinne können die wahre Natur der Dinge nicht erfassen. Sinnestäuschungen.	Hier ist die wahre Natur der Dinge zu finden.
Erfahrungen, Experimente lassen nur Schatten der wirklichen Dinge erkennen	Nicht der unmittelbaren Erfahrung zugänglich, Idealisierungen. Die Wirklichkeit.
Sehr kleine Flecken, Kanten von Gegenständen, Oberflächen von Gegenständen	Idee des Punktes, Idee der Geraden, Idee der Ebene,

Euklids Axiome beschreiben die ideale Welt der existierenden geometrischen Objekte.
Die so genannte „**Platonistische Auffassung der Mathematik**“ geht von einer vom Menschen unabhängigen Existenz mathematischer Sachverhalte aus.

Diese Auffassung lässt sich im berühmten „Höhlengleichnis“ von Platon finden.

Platons Höhlengleichnis (Aus dtv - Atlas Philosophie)

Der griechische Philosoph und Pädagoge Platon (427—347v. Chr.) schildert im 7. Buch der ‚Politeia‘ gleichnisartig das beschränkte Erkenntnisvermögen des Menschen — und die daraus resultierende Weltsicht der Selbstbescheidung.



- Nächstdem, sprach ich, vergleiche dir unsere Natur in Bezug auf Bildung und Unbildung folgendem Zustande. Sieh nämlich Menschen wie in einer unterirdischen, höhlenartigen Wohnung, die einen gegen das Licht geöffneten Zugang längs der ganzen Höhle hat. In dieser seien sie von Kindheit an gefesselt an Hals und Schenkeln, so dass sie auf demselben Fleck bleiben und auch nur nach vorne hin sehen, den Kopf aber herumzudrehen der Fessel wegen nicht vermögend sind. Licht aber haben sie von einem Feuer, welches von oben und von ferne her hinter ihnen brennt. Zwischen dem Feuer und den Gefangenen geht oben her ein Weg, längs diesem sieh eine Mauer aufgeführt wie die Schranken, welche die Gaukler vor den Zuschauern sich erbauen, über welche herüber sie ihre Kunststücke zeigen.
- Ich sehe, sagte er.
- Sieh nun längs dieser Mauer Menschen allerlei Geräte tragen, die über die Mauer herüberragen, und Bildsäulen und andere steinerne und hölzerne Bilder und von allerlei Arbeit; einige, wie natürlich, reden dabei, andere schweigen.
- Ein gar wunderliches Bild, sprach er, stellst du dar und wunderliche Gefangene.
- Uns ganz ähnliche, entgegnete ich. Denn zuerst, meinst du wohl, dass dergleichen Menschen von sich selbst und voneinander je etwas anderes gesehen haben als die Schatten, welche das Feuer auf die ihnen gegenüberstehende Wand der Höhle wirft?
- Wie sollten sie, sprach er, wenn sie gezwungen sind, zeitlebens den Kopf unbeweglich zu halten!
- Und von dem Vorübergetragenen nicht eben dieses?

- Was sonst?
- Wenn sie nun miteinander reden könnten, glaubst du nicht, dass sie auch pflegen würden, dieses Vorhandene zu benennen, was sie sähen?
- Notwendig.
- Und wie, wenn ihr Kerker auch einen Widerhall hätte von drüben her, meinst du, wenn einer von den Vorübergehenden spräche, sie würden denken, etwas anderes rede als der eben vorübergehende Schatten?
- Nein, beim Zeus, sagte er.
- Auf keine Weise also können diese irgendetwas anderes für das Wahre halten als die Schatten jener Kunstwerke?
- Ganz unmöglich.
- Nun betrachte auch, sprach ich, die Lösung und Heilung von ihren Banden und ihrem Unverstande, wie es damit natürlich stehen würde, wenn ihnen folgendes begegnete. Wenn einer entfesselt wäre und gezwungen würde, sogleich aufzustehen, den Hals herumzudrehen, zu gehen und gegen das Licht zu sehn, und, indem er das täte, immer Schmerzen hätte und wegen des flimmernden Glanzes nicht recht vermöchte, jene Dinge zu erkennen, wovon er vorher die Schatten sah: was, meinst du wohl, würde er sagen, wenn ihm einer versicherte, damals habe er lauter Nichtiges gesehen, jetzt aber, dem Seienden näher und zu dem mehr Seienden gewendet, sähe er richtiger, und, ihm jedes Vorübergehende zeigend, ihn fragte und zu antworten zwänge, was es sei? Meinst du nicht, er werde ganz verwirrt sein und glauben, was er damals gesehen, sei doch wirklicher als was ihm jetzt gezeigt werde?
- Bei weitem, antwortete er.
- Und wenn man ihn gar in das Licht selbst zu sehen nötigte, würden ihm wohl die Augen schmerzen, und er würde fliehen und zu jenem zurückkehren, was er anzusehen im Stande ist, fest überzeugt, dies sei in der Tat deutlicher als das zuletzt gezeigte?
- Allerdings.

(In: Plato: Phaidon. Politeia. Sämtliche werke, Bd. III. Rowohlts Klassiker, in der Übersetzung von Friedrich Schleiermacher, Hamburg 1958, Politeiea, Siebentes Buch, S. 224 - 225) Die Grafik ist entnommen aus dtv - Atlas Philosophie.

Hilbert (Formalismus, moderne Mathematik)

Sichtbare, erfahrbare Welt	Unklar, was „die Wirklichkeit" ist
Formale Beschreibungen von Beziehungen	Gibt es eine wahre Natur der Dinge? Die Ideale Welt des Platon und Euklid existiert hier nicht mehr!

Hilberts Axiome beschreiben in formaler Weise nur Beziehungen zwischen „geometrischen Objekten".
Sie regeln nur den *Umgang* mit den Begriffen, sagen aber nichts über deren *Existenz* aus.

Die zentralen Anliegen sind hier nur
• Widerspruchsfreiheit
• Vollständigkeit

Die axiomatisch gewonnene Mathematik kann nun dazu dienen, die „reale Welt" zu erfassen.

„Formalistische Auffassung der Mathematik":

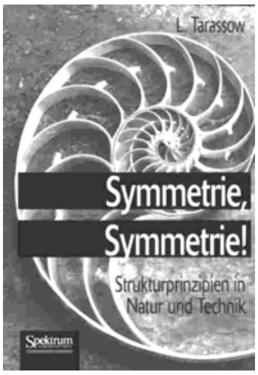
Die Existenz mathematischer Sachverhalte ist bedeutungslos.
Mathematik ist ein formales Herleiten von Aussagen aus Axiomen. Dabei werden nur unzweideutig formulierte Regeln verwandt, die auch von Maschinen angewandt werden könnten.

Konstruktivismus

Tatsächlich werden Mathematik und Naturwissenschaften weder formal betrieben noch werden Begriffe formal erworben. So sind tatsächlich geführte Beweise in der Regel eher als „gesellschaftlicher Prozess" der Übereinkunft, dass die Argumente ausreichend seien denn als formale Herleitung zu sehen.
So haben sich in den letzten 40 Jahren weitere Auffassungen von Mathematik entwickelt. Hier sei nur der in der Mathematikdidaktik immer wieder eingenommene Standpunkt des Konstruktivismus genannt.

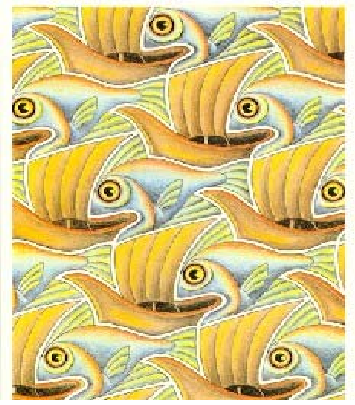
Konstruktivisten befassen sich mit dem Prozess des Erwerbs von Begriffen und der Kommunikation über die „wirkliche Welt".
Es gibt auch hier keine absolut existierende Welt, sondern jedes Individuum konstruiert ***seine*** Wirklichkeit.

1.5 Symmetrie und Abbildungen



Symmetrie ist einer der grundlegenden Begriffe der Geometrie. Symmetrie hat für das ästhetische Empfinden schon immer eine große Rolle gespielt, vielfach gibt es Beispiele aus der Kunst, wie z.B. wiederum die Werke von M.C.Escher zeigen. Auch in der Natur findet man stets einerseits Symmetrie, andererseits auch Brechungen von Symmetrie.
Symmetrie spielt auch für die Grundlagen der Naturwissenschaft eine zentrale Rolle. Schon seit dem Altertum wurde versucht, physikalische Gesetze auf Symmetrieforderungen zurückzuführen. Ein Beispiel dafür sind die Begründungen von J. Kepler für die Radien der Planetenbahnen im Sonnensystem mit Hilfe der so genannten platonischen Körper.
Verständliche Informationen über die Bedeutung von Symmetrie für die Beschreibung der Welt finden sich in den nebenstehenden beiden Büchern.

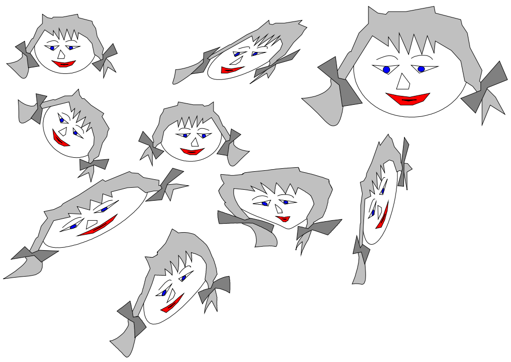
Einige der Bilder von M.C.Escher zur Symmetrie



Der Begriff Symmetrie ist eng verbunden mit dem Begriff der ***Abbildung***.
Daher wird unsere Geometrieveranstaltung sich zunächst mit dem Abbildungsbegriff befassen.

Eine sehr allgemeine und weit reichende **Definition von Symmetrie** in der Ebene ist die folgende:

- Sei h eine Abbildung der Ebene E in sich und F eine Figur in der Ebene.
  F heißt ***h-symmetrisch***, wenn h(F)=F ist, d.h. wenn F invariant unter h ist.



Eine Frage, die mit dem Abbildungsbegriff klar beantwortet werden kann, ist die nach der „Gleichheit“ von Figuren:

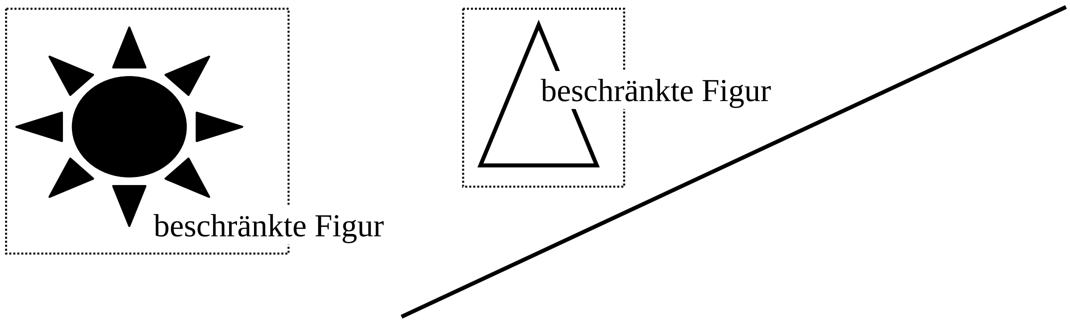
Welche der nebenstehenden Figuren sind einander „gleich“?

Die Antwort: Das hängt davon ab, ob man Figuren als „gleich“ bezeichnet, die
- identisch sind,
- durch Drehungen und Verschiebungen auseinander hervorgehen,
- durch Drehungen, Verschiebungen und Spiegelungen auseinander hervorgehen
- durch noch allgemeinere Abbildungen auseinander hervorgehen.

In der Schulgeometrie meint man meist, eine Figur sei eindeutig bestimmt, wenn sie *bis auf Kongruenzabbildungen* eindeutig festgelegt ist.

1.6 Definitionen und Sprechweisen:

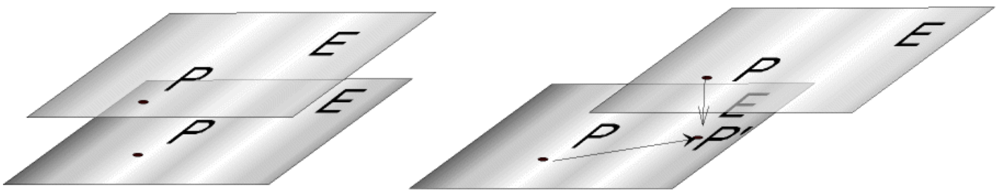
- Mit E bezeichnen wir die Anschauungsebene (unbegrenzt ausgedehnte Zeichenebene, Tafelebene, ...)
- Unter einer (ebenen) ***Figur*** verstehen wir eine nichtleere Teilmenge F der Ebene E.
- Eine Figur heißt ***beschränkt***, wenn sie ganz in einem Rechteck eingeschlossen werden kann.



Abbildungen der Ebene in sich

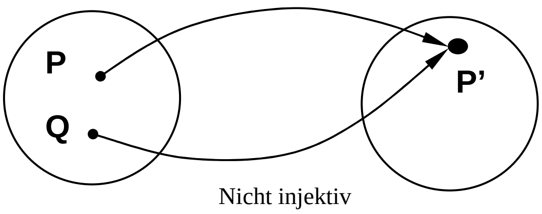
Beispiel: Verschiebung der Ebene mit Hilfe einer Transparent-Folie.

Jeder Punkt der Ebene soll in eine feste Richtung um die gleiche Strecke verschoben werden. Richtung und Verschiebungslänge gibt man oft durch einen Pfeil an, den man Verschiebungsvektor nennt. Verschiedene Pfeile gleicher Länge und gleicher Richtung beschreiben die gleiche Verschiebung.
Man kann sich vorstellen, man habe ein Blatt Papier (die Ebene E) und eine Transparentfolie (auch die Ebene E) darauf. Markiert man auf der Folie Punkte und verschiebt die Folie, so wird jedem Punkt P auf der Folie ein darunter liegender Punkt P' auf dem Papier zugeordnet. Dies gibt eine Abbildung von E in E.



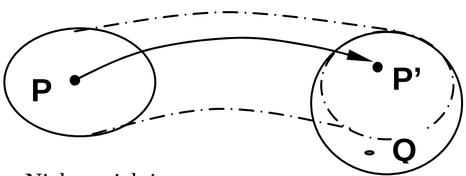
- Eine Abbildung f der Ebene E in sich ist eine Zuordnung, die jedem Punkt P der Ebene E eindeutig einen Bildpunkt P' zuordnet.
  Wir schreiben $f:\ E \to E$
  $f:\ P \mapsto P'$

- Eine Abbildung heißt *injektiv*, wenn keine zwei verschiedenen Punkte den gleichen Bildpunkt besitzen.



Nicht injektiv

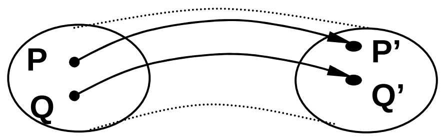
- Eine Abbildung heißt *surjektiv*, wenn jeder Punkt aus E als Bildpunkt vorkommt.



Nicht surjektiv

Q kommt nicht als Bildpunkt vor

- Eine Abbildung heißt *bijektiv*, wenn sie *injektiv* und *surjektiv* ist.

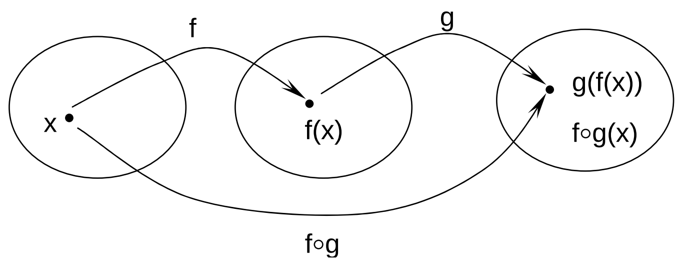


Keine zwei verschiedenen Punkte haben gleiche Bildpunkte

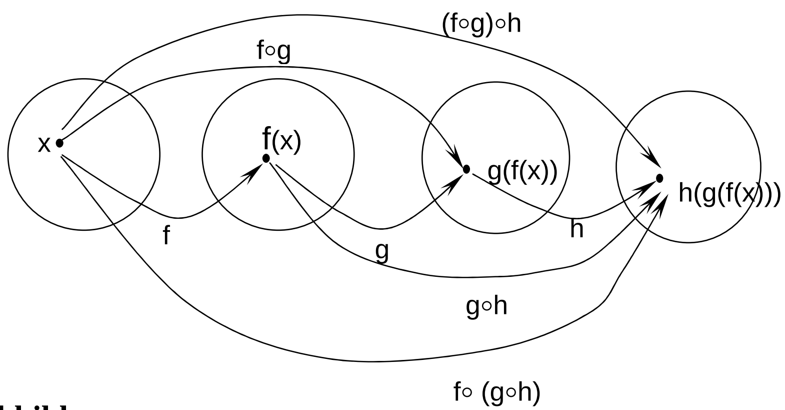
Alle Punkte kommen als Bildpunkte vor

Hintereinanderausführen von Abbildungen $E \to E$

- Es seien $f: E \to E$ und $g: E \to E$ Abbildungen der Ebene E in sich.
  Die Verkettung $f \circ g : E \to E$ wird erklärt durch $f \circ g\,(x) = g\,(f(x))$.
  Zuerst wird f ausgeführt; auf das Ergebnis f(x) wird g angewandt!



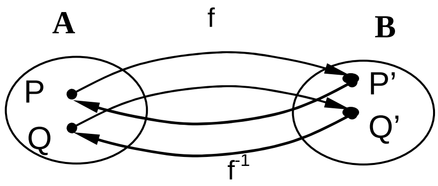
Satz 1.1
a) Assoziativgesetz $(f \circ g) \circ h = f \circ (g \circ h)$
b) Das Kommutativgesetz gilt nicht: im Allgemeinen ist $f \circ g \neq g \circ f$ (Begründung?)



Inverse einer Abbildung

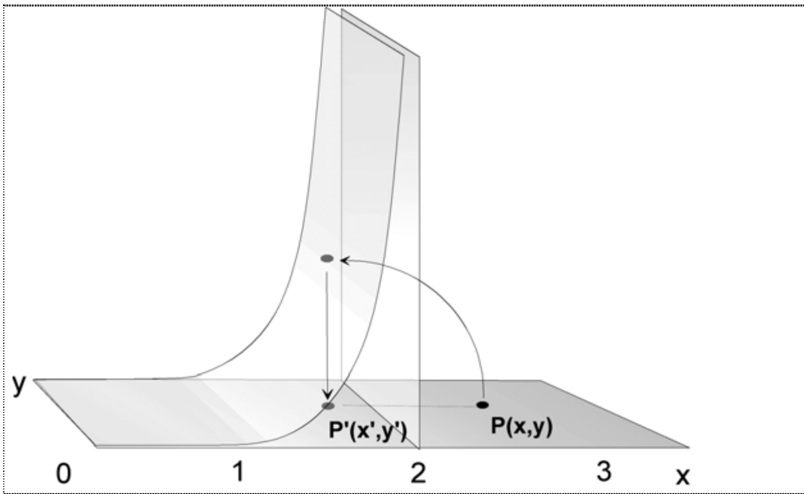
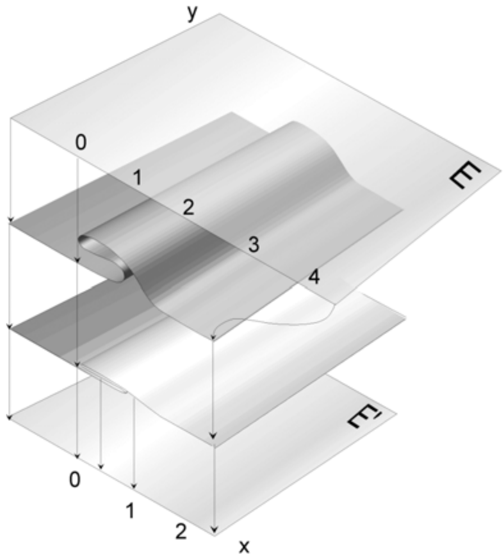
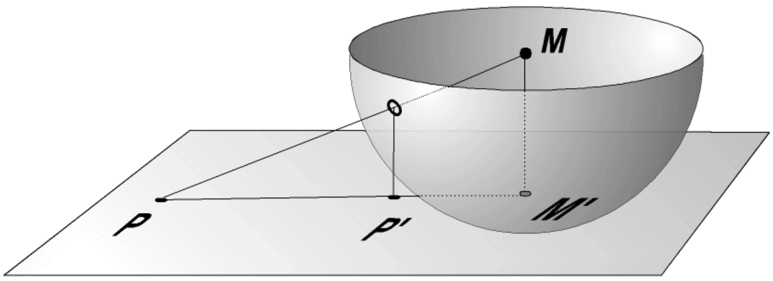
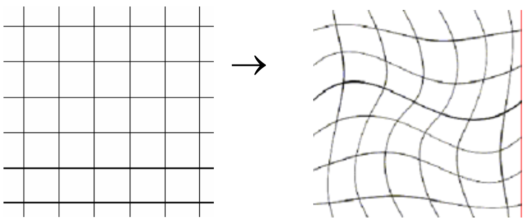
Ist f eine bijektive Abbildung $A \to B$, dann kann man f umkehren, d.h. jedem Bildpunkt wird sein eindeutig bestimmter Urbildpunkt zugeordnet. Die so definierte Abbildung wird mit f^{-1} bezeichnet und Inverse zu f oder Umkehrabbildung zu f genannt.

Für f^{-1} gilt : $f \circ f^{-1} = id_A$ und $f^{-1} \circ f = id_B$. Dabei sind id_A und id_B die *identischen Abbildungen* auf A bzw. auf B.
Für die identische Abbildung id_A einer Menge A auf sich ist $f \circ id_A = id_A \circ f = f$ für alle Abbildungen f von A nach A.



Jedem Bildpunkt P' wird durch f^{-1} sein Urbild P zugeordnet

Weitere Beispiele für Abbildungen der Ebene in sich

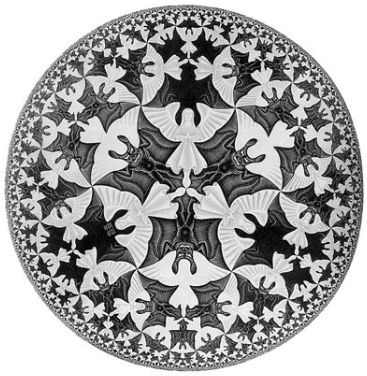
	Welche Abbildungseigenschaften liegen vor: injektiv, surjektiv, bijektiv? Worauf werden Geraden abgebildet? Prüfen Sie an ausgewählten Punkten, dass durch die unten stehende Vorschrift eine solche Abbildung angegeben wird. $(x,y) \mapsto \begin{cases} (x,y) & \text{für x} \le 1 \\ \left(2-\frac{1}{x}, y\right) & \text{für x} > 1 \end{cases}$
	Welche Abbildungseigenschaften liegen vor: injektiv, surjektiv, bijektiv? Worauf werden Geraden abgebildet? Prüfen Sie an ausgewählten Punkten, dass durch die unten stehende Vorschrift eine solche Abbildung angegeben wird. $(x,y) \mapsto \begin{cases} (x,y) & \textit{für} \quad x \le 1 \\ (2-x,y) & \textit{für} \quad 1 < x \le 2 \\ (x-2,y) & \textit{für} \quad x > 2 \end{cases}$
	Welche Abbildungseigenschaften liegen vor: injektiv, surjektiv, bijektiv? Worauf werden Geraden abgebildet? Prüfen Sie an ausgewählten Punkten, dass durch die unten stehende Vorschrift eine solche Abbildung angegeben wird. $x' = \frac{x}{\sqrt{x^2+y^2+1}}$ $y' = \frac{y}{\sqrt{x^2+y^2+1}}$
f: 	Können sie im Bild eine Abbildung der Ebene in sich erkennen? Beschreiben Sie diese Abbildung. Wie wird sie gewonnen? Welche Abbildungseigenschaften liegen vor: injektiv, surjektiv, bijektiv? Worauf werden Geraden abgebildet?

Beispiel aus der Kunst

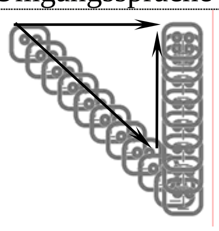
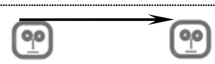
In der Kunst findet man viele Abbildungen der Ebene in sich, die seltsame Eigenschaften haben.
Ein sehr bekannter Künstler, der mit den Mitteln der Mathematik spielt, ist M.C.Escher. Als Beispiel dient hier eines seiner Bilder; es ist nur das *Abbild* der Ebene gezeigt.

- Können sie im Bild eine Abbildung der Ebene in sich erkennen? Beschreiben Sie diese Abbildung. Wie wird sie gewonnen?
- Welche Abbildungseigenschaften liegen vor: injektiv, surjektiv, bijektiv?
- Worauf werden Geraden abgebildet?

f: ? →

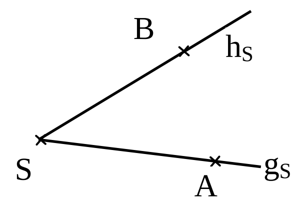


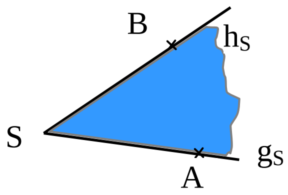
Unterschiede zwischen dem Abbildungsbegriff in der Mathematik und dem der Physik bzw. Umgangssprache

Umgangssprache	Mathematik
 Der Weg ist bedeutsam. („Kratzer im Parkett“) Die Verkettung der beiden Verschiebungen ***kann ersetzt werden durch** eine Verschiebung.*	 Nur das Ergebnis ist bedeutsam. Die Abbildung ist eine Menge von Punktepaaren (P,P’), P, P’$\in$E Die Verkettung der beiden Verschiebungen ***ist** eine Verschiebung.*
Objekte oder Figuren werden bewegt, z.B. Dreiecke verschoben. Man denkt sich die Ebene als fest	*Alle* Punkte der Ebene werden abgebildet. Da Figuren Teilmengen der Ebene sind, werden auch sie dabei abgebildet. Dennoch werden wir die umgangssprachliche Sprechweise benutzen. Ist f eine Abbildung E$\to$E und M eine Teilmenge von E, dann schreibt man f(M) für $\{f(P)/\ P\in M\}$.

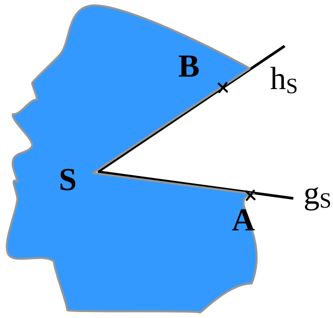
Winkelbegriffe

Zwei Halbgeraden g_S und h_S mit gemeinsamem Anfangspunkt S bilden eine Winkelfigur. Diese Winkelfigur legt zwei Winkelfelder fest, ein inneres und ein äußeres, wenn die Halbgeraden nicht auf einer Geraden liegen.





Winkel $\angle g_S,h_S$
Winkel $\angle ASB$

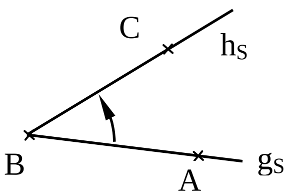


Winkel $\angle h_S,g_S$
Winkel $\angle BSA$

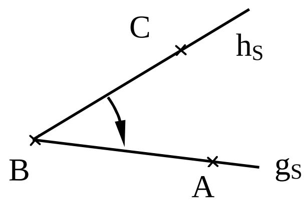
Um diese Winkelfelder zu unterscheiden, führt man eine Orientierung von Winkeln ein.
Unter $\angle g_S,h_S$ wollen wir das Winkelfeld verstehen, das überstrichen wird, wenn g_S im Gegenuhrzeigersinn um S auf h_S gedreht wird. Hier bezeichnet also $\angle g_S,h_S$ das innere Winkelfeld, $\angle h_S,g_S$ das äußere Winkelfeld. Statt Winkelfeld sagen wir auch einfach Winkel.
Werden die Halbgeraden durch Punkte A, B, S bestimmt, so bezeichnet man die Winkel entsprechend: $\angle ASB$ ist der Winkel, der überstrichen wird, wenn die Halbgerade g_S mit Anfangspunkt S und Punkt A auf die Halbgerade h_S mit Anfangspunkt S und Punkt B gedreht wird.
Winkel können in Grad gemessen und in ihrer Größe verglichen werden. Dieser „Messprozess“ bereitet bei einem axiomatischen Vorgehen große Probleme, die bei unserem intuitiven Vorgehen nicht thematisiert werden sollen; wir gehen davon aus, dass dieser Messprozess vertraut ist. Wir unterscheiden in der Bezeichnung auch nicht zwischen Winkel und Winkelmaß.

Winkelmaße nehmen in diesem Sinne nur Werte aus dem Bereich [0°,360°[an.
Ein Winkel von 360° ist gleich groß wie ein Winkel von 0°.
Winkelfelder werden stets im mathematisch positiven Sinn notiert.

In technischen oder physikalischen Anwendungen, wenn bei Drehungen etwa der Verlauf der Drehung und nicht nur Anfangszustand und Endzustand von Bedeutung sind, ist es wichtig, orientierte Winkel zu betrachten.



positiver orientierter Winkel



negativer orientierter Winkel

In diesem Sinne sind auch Winkelmaße mit Werten größer als 360° sinnvoll. So kann man etwa die Umdrehung eines Karussells mit -900° angeben: Das Karussell hat sich zweieinhalb mal im Uhrzeigersinn gedreht.

Wir werden in der Geometrie auch negative Winkel und Winkel mit Maßen über 360° benutzen, um intuitive Bezeichnungen zu ermöglichen und Berechnungen zu erleichtern. Diese Winkel sind aber stets ***gleich*** einem nicht orientierten Winkel mit Maß aus dem Bereich [0°,360°[

Wenn wir in der Geometrie Drehungen betrachten, dann ist ein Winkel mit Maß –40° ***gleich*** einem Winkel mit 320°, und ein Winkel von 420° ***gleich*** einem Winkel von 60°.

Bemerkung zu Dynamischen Geometrie Systemen auf dem Computer:

Wenn bei der Winkelbezeichnung die Orientierung nicht berücksichtigt wird, dann kann nicht zwischen innerem und äußerem Winkelfeld unterschieden werden. Da Winkelorientierung Schülern Schwierigkeiten bereitet, kann man im System „DynaGeo“ bei er Grundeinstellung wählen, ob Winkelorientierung berücksichtigt wird oder nicht. Ohne Orientierung können dann nur Winkel zwischen 0° und 180° gemessen werden.

Parallele Geraden

Es gibt mehrere Möglichkeiten, Parallelität von Geraden zu definieren. Wir wollen definieren:

- Zwei Geraden g und h heißen *parallel*, wenn sie beide auf einer dritten Geraden k senkrecht stehen. Wir schreiben dafür $g||h$.

Nach dieser Definition gilt insbesondere $g||g$!

Unter Voraussetzung von genügend vielen Axiomen (aber wir wollen uns hier bewusst nicht mit einer strengen Axiomatik befassen) kann man folgern:

- $g||h$ und $g \neq h$ $\Leftrightarrow$ g und h haben keinen gemeinsamen Punkt.
- $g||h$ $\Leftrightarrow$ g und h haben überall den gleichen Abstand.

Diese beiden Eigenschaften könnte man auch zur Definition von Parallelität verwenden. Die Definition über die erste Eigenschaft lautete dann

- $g||h$ $:\Leftrightarrow$ g und h haben keinen gemeinsamen Punkt oder $g=h$.

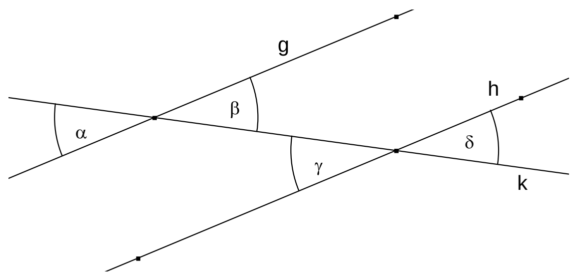
Einige Bemerkungen zur „Axiomatik“

Wie zuvor schon oft bemerkt, wollen wir hier keine axiomatische Geometrie betreiben, wollen aber selbstverständlich, unter Verwendung von hinreichend vielen nicht weiter begründeten Voraussetzungen, geometrische Sätze beweisen. Diese Voraussetzungen können wir als Axiome auffassen, wobei wir weder nach Unabhängigkeit noch nach Lückenlosigkeit streben; wir werden viele dieser „Axiome“ auch nicht explizit erwähnen. Dazu sei auf die entsprechende Literatur verwiesen.

Folgende Sachverhalte, die wir immer wieder im Sinne von Axiomen verwenden wollen, sollen hier noch einmal kurz festgehalten werden.

Winkel an geschnittenen Parallelen

- Die Parallelen g, h , $g \neq h$, werden von einer Geraden k geschnitten. Dann sind
  - die *Stufenwinkel* α und γ gleich groß,
  - die *Wechselwinkel* β und γ bzw. α und δ gleich groß.



Sätze über die Größe von Seitenlängen und Winkelgrößen in Dreiecken (Kongruenzsätze)

Die aus der Schule geläufigen „Kongruenzsätze“ in der folgenden Form („sws“ als Beispiel):

- Stimmen zwei Dreiecke in zwei Seiten(längen) und der Größe des eingeschlossenen Winkels überein, dann stimmen sie auch in allen anderen Seitenlängen und Winkelgrößen überein.

1.7 Konstruktionen mit Zirkel und Lineal

Wenn wir von „Konstruktionen“ sprechen, dann meinen wir stets „Konstruktionen mit Zirkel und Lineal“. Dabei versteht man unter einem Lineal ein Gerät ohne Skaleneinteilung, nur zum Zeichnen gerader Linien. Bei Konstruktionen mit Zirkel und Lineal dürfen nur die folgenden Schritte durchgeführt werden:

1. Beliebigen Punkt zeichnen.
2. Beliebigen Punkt auf einer Geraden, Strecke oder Kreislinie zeichnen.
3. Gerade durch zwei Punkte zeichnen (Lineal).
4. Zwei Punkte durch eine Strecke verbinden(Lineal).
5. Schnittpunkte von Geraden, Strecken und Kreislinien zeichnen.
6. Kreis um einen gegebenen Mittelpunkt M durch einen weiteren Punkt P zeichnen (Zirkel).
7. Kreis um einen gegebenen Mittelpunkt M mit einem Radius zeichnen, der von zwei (schon konstruierten oder gegebenen) Punkten übernommen werden kann (Zirkel).
   “Radius aus der Zeichnung in den Zirkel übernehmen und damit einen Kreis zeichnen“.

Wenn wir davon sprechen, eine Streckenlänge oder ein Winkelmaß sei gegeben, dann meinen wir, dass ein Objekt mit diesen Maßen vorgegeben ist, es also nicht konstruiert werden muss. Gegebene Streckenlängen und Winkel müssen prinzipiell mit Zirkel und Lineal übertragen werden, dürfen also nicht abgemessen werden.
Nachdem einige Grundkonstruktionen mit Zirkel und Lineal als durchführbar erkannt wurden, lassen wir diese als „Module“ in späteren Konstruktionen zu. Sie werden in Konstruktionsbeschreibungen als Ganzes aufgeführt. Bei der Durchführung einer Konstruktion dürfen dafür auch die üblichen Zeichenhilfsmittel verwandt werden:

- Senkrechte zu Geraden oder Strecken durch einen Punkt →Geodreieck.
- Parallele zu Geraden oder Strecken durch einen Punkt →Geodreieck.
- Abtragen einer gegebenen Streckenlänge auf einer Geraden → Lineal mit Maßstab.
- Übertragen einer gegebenen Winkelgröße an eine Gerade in einem Punkt → Winkelmesser.

In den Übungen sollen Sie zeigen, dass solche Grundkonstruktionen mit Zirkel und Lineal alleine durchführbar sind. In „DynaGeo“ stehen Hilfsmittel für diese Grundkonstruktionen ebenfalls zur Verfügung.

Aufgabe

Im Folgenden sollen Kenntnisse aus der SI-Geometrie verwandt werden.
Konstruieren Sie mit Zirkel und Lineal:

1. zu einer Strecke $\overline{AB}$ die Mittelsenkrechte von $\overline{AB}$,
2. zu einer Strecke $\overline{AB}$ den Mittelpunkt $\overline{AB}$,
3. zu einem Punkt P und einer Geraden g das Lot von P auf g,
4. zu einem Punkt P und einer Geraden g den an g gespiegelten Punkt P’,
5. zu einem Punkt P und einer Geraden g die zu g parallele Gerade h durch P,
6. zu zwei sich schneidenden Geraden g, h die Winkelhalbierende des Winkels $\angle(g,h)$
   ($\angle(g,h)$ ist der Winkel, der bei Drehung von g auf h im Gegenuhrzeigersinn überstrichen wird),
7. zu einer Strecke $\overline{AB}$ die Punkte, die $\overline{AB}$ dritteln,
8. zu drei Punkten P, Q, R, die nicht auf einer Geraden liegen, den Kreis, der durch P, Q und R geht,
9. zu einem gegebenen Winkel $\angle(g,h)$ den an einen Strahl k mit Startpunkt P im Gegenuhrzeigersinn angetragenen gleich großen Winkel.

- Führen Sie diese Konstruktionen ohne Computer durch. Geben Sie eine Konstruktionsbeschreibung.
- Führen Sie diese Konstruktionen mit DynaGeo durch. Dabei dürfen Sie nur die folgenden Hilfsmittel verwenden:

1. Basispunkt (freien Punkt zeichnen),
2. Punkt auf einer Linie,
3. Gerade durch 2 Punkte
4. Strecke zwischen 2 Punkten,
5. Schnittpunkt zweier Linien,
6. Kreis um Mittelpunkt durch Kreispunkt.

Ein dem Konstruktionsschritt 7 (“Radius aus der Zeichnung in den Zirkel übernehmen und damit einen Kreis zeichnen“) entsprechendes Hilfsmittel steht in DynaGeo so nicht zur Verfügung. Es muss durch mehrere andere Schritte ersetzt werden (diese Konstruktion kann als „Makro“ festgehalten werden und steht dann auch als Grundkonstruktion zur Verfügung).

Beispiel einer Konstruktion mit Zirkel und Lineal in DynaGeo

Gegeben: a, b, c.
Konstruiere das Dreieck ABC mit den Seitenlängen a, b, c.

In DynaGeo:

Konstruktionstext aus DynaGeo übernommen (mit leichten Änderungen):

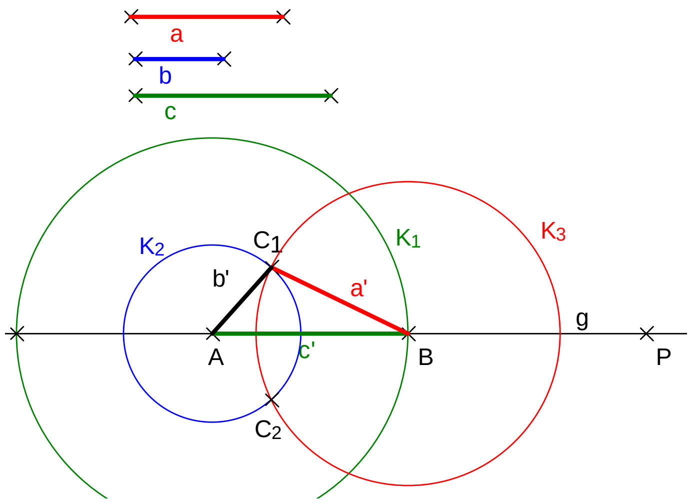
Voraussetzungen:

P_1 ist ein freier Basispunkt, P_2 ist ein freier Basispunkt,
P_3 ist ein freier Basispunkt, P_4 ist ein freier Basispunkt
P_5 ist ein freier Basispunkt, P_6 ist ein freier Basispunkt

a ist die Strecke [P_1 ; P_2]
b ist die Strecke [P_3 ; P_4]
c ist die Strecke [P_5 ; P_6]

Konstruktion:

A ist ein freier Basispunkt
P ist ein freier Basispunkt
g ist die Gerade (A ; P)
K_1 ist ein Kreis um A mit Radius c (Makro)
B ist ein Schnittpunkt der Linie g mit dem Kreis K_1
K_2 ist ein Kreis um A mit Radius b (Makro)
K_3 ist ein Kreis um B mit Radius a (Makro)
C_1 ist ein Schnittpunkt der Kreise K_2 und K_3
C_2 ist der 2. Schnittpunkt der Kreise K_2 und K_3
c' ist die Strecke [A ; B]
a' ist die Strecke [B ; C_1]
b' ist die Strecke [C_1 ; A]



Ohne DynaGeo:

Gegeben: a, b, c
Konstruiere das Dreieck ABC mit den Seitenlängen a,b,c.

Konstruktionstext für die Konstruktion:

Ausführlich	Sehr kurz
Punkt A Gerade g durch A K_1 ist ein Kreis um A mit Radius c B ist ein Schnittpunkt der Geraden g mit Kreis K_1	Strecke $\overline{AB} = c$
K_2 ist ein Kreis um A mit Radius b	$K_2(A,b)$

K_3 ist ein Kreis um B mit Radius a
C_1 ein Schnittpunkt der Kreise K_2 und K_3
C_2 2. Schnittpunkt der Kreise K_2 und K_3
c' ist die Strecke [A ; B]
a' ist die Strecke [B ; C_1]
b' ist die Strecke [C_1 ; A]

$K_3(B,a)$
C_1 ein Schnittpunkt K_2,K_3
C_2 der 2. Schnittpunkt K_2,K_3
$C = C_1$ oder $C = C_2$

Dreieck ABC