



Einführung in die Geometrie

SS 2005

Prof.Dr.R.Deissler

PH-Freiburg

¹ Abbildung: Geometrie aus dem Zyklus „Die sieben freien Künste“, Münstervorhalle des Freiburger Münsters.



Inhalt

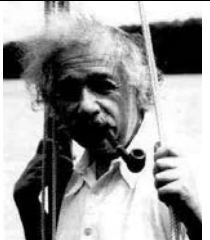
1 Hintergrund – Geschichte - Grundbegriffe.....	1
1.1 Vom Wesen der Geometrie.....	1
1.2 "Die Elemente" des Euklid.....	2
1.3 David Hilbert: Geometrie als strenge axiomatische Theorie.....	2
1.4 Die axiomatische Methode: Von Euklid zu Hilbert.....	4
1.5 Symmetrie und Abbildungen.....	6
1.6 Definitionen und Sprechweisen:.....	7
1.7 Konstruktionen mit Zirkel und Lineal.....	13
2 Kongruenzabbildungen.....	16
2.1 Geradenspiegelungen.....	16
2.2 Definition und Eigenschaften von Kongruenzabbildungen.....	18
2.3 Hintereinanderausführen von 2 Achsenspiegelungen.....	20
2.4 Hintereinanderausführen von 3 Achsenspiegelungen.....	23
2.5 Drehungen.....	25
2.6 Verschiebungen.....	26
2.7 Schubsiegelungen (Gleitspiegelungen).....	27
2.8 Kongruenzabbildungen - Produkte von Achsenspiegelungen.....	28
2.9 Hintereinanderausführen von 4 und mehr Geradenspiegelungen.....	29
3 Deckabbildungen von Figuren - Symmetrie.....	33
3.1 Die Gruppe (K, \circ) aller Kongruenzabbildungen einer Ebene.....	33
3.2 Die Deckabbildungen eines Quadrats.....	33
3.3 Untergruppen der Deckabbildungsgruppe des Quadrats.....	34
3.4 Symmetrieachsen - Deckdrehungen einer (beschränkten) Figur.....	34
3.5 Kreis - Zweikreisfigur.....	34
3.6 Aufgaben zur Symmetrie.....	34
3.7 Parkettieren.....	34
3.7.1 Was ist Parkettieren?.....	34
3.7.2 Warum wird im Mathematikunterricht parkettiert?.....	34
3.7.3 Parkettieren durch geeignetes Verändern von Grundbausteinen.....	34
3.7.4 Parkettieren mit mehr als einem Grundbaustein.....	34
4 Ähnlichkeitsabbildungen.....	34
4.1 Zentrische Streckungen.....	34
4.2 Die Strahlensätze.....	34
4.3 Flächeninhalt und Volumen bei zentrischer Streckung.....	34
4.4 Hintereinanderausführen von zentrischen Streckungen.....	34
4.5 Ähnlichkeitsabbildungen.....	34
4.6 Die Gruppe (\tilde{A}, \circ) aller Ähnlichkeitsabbildungen einer Ebene.....	34
4.7 Ähnliche Figuren und Ähnlichkeitssätze.....	34
5 Dreieckslehre.....	34
5.1 Bedeutung der Dreiecke.....	34
5.2 Winkelsumme im Dreieck.....	34
5.3 Besondere Punkte im Dreieck.....	34
5.4 Kongruenzsätze.....	34
5.5 Geometrische Orte.....	34
5.6 Winkelsätze: Umfangswinkelsatz und Sehnen-Tangenten-Winkelsatz.....	34
5.7 Flächensätze: Pythagoras-Satzgruppe.....	34
6 Viereckslehre.....	34
6.1 Haus der Vierecke.....	34
6.2 Winkelsumme im Viereck.....	34
6.3 Vierecke mit Umkreis („Sehnen-Viereck“).....	34
6.4 Vierecke mit Inkreis („Tangenten-Viereck“).....	34
6.5 Das Mittenviereck.....	34
7 Der Flächeninhalt.....	34
7.1 Flächeninhalt als Größe.....	34
7.2 Der Messprozess.....	34
7.2.1 Zerlegungsgleich - ergänzungsgleich.....	34

7.2.2 Flächeninhalt von n-Ecken34
 7.2.3 Das Prinzip von Cavalieri (1598 – 1647)34
 7.2.4 Grenzprozesse34
 7.3 Die Scherung – eine flächentreue Abbildung.....34
 7.4 Einige historische Bemerkungen.....34
8 Literatur34

1 Hintergrund – Geschichte - Grundbegriffe

1.1 Vom Wesen der Geometrie

Empirische Wissenschaft	Formal-logische Theorie	
Erfahrungswissenschaft wie die Physik	Keine Begründung durch Erfahrung, keine anschaulichen Argumente	
Experimente, Beobachtungen Aussagen über die Natur	Formale Ableitung von Sätzen nach Regeln der Logik aus Axiomen (nicht weiter begründetes System von Grundtatsachen) Anschauung nur als <i>Hinweis</i> auf Beweisführungen	
Deutung der Theorie in der Welt	Grundlage für Theorien der Physik	
Schule Alltag Technik	Hochschulmathematik Vermittlung der Idee des Beweisens auch in der Schule (so genanntes lokales Ordnen)	
		
	Axiomatische Methode: Begonnen von Euklid 300 v. Chr. Buch „Elemente“	Vollendet von David Hilbert 1900 n. Chr. Buch „Grundlagen der Geometrie“

<p>„Insofern sich die Sätze der Mathematik auf die Wirklichkeit beziehen, sind sie nicht sicher, und insofern sie sicher sind, beziehen sie sich nicht auf die Wirklichkeit.“</p> <p>A. Einstein, Geometrie und Erfahrung</p>	
---	---

1.2 "Die Elemente" des Euklid

Um 300 v. Chr. sammelt **Euklid** das grundlegende mathematische Wissen seiner Zeit und stellt es in dem Buch **Die Elemente** systematisch dar.

Er beginnt mit **Definitionen**. → vergleiche David Hilbert!

- Ein Punkt ist, was keine Teile hat.
- Eine Linie breitenlose Länge.
- Die Enden einer Linie sind Punkte.
- Eine gerade Linie (Strecke) ist eine solche, die zu den Punkten auf ihr gleichmäßig liegt.

Es folgen **Postulate**. Gefordert soll sein:

- dass man von jedem Punkt nach jedem Punkt die Strecke ziehen kann;
- dass man eine begrenzte gerade Linie zusammenhängend gerade verlängern kann.

Schließlich gibt er **Axiome** an.

- Was demselben gleich ist, ist auch einander gleich.
- Wenn Gleichem Gleiches hinzugefügt wird, sind die Ganzen gleich.

Damit lassen sich nun Probleme lösen und Theoreme beweisen.

Beispiel für ein **Problem**:

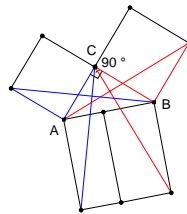
- Über einer gegebenen Strecke ein gleichseitiges Dreieck errichten.

Beispiel für ein **Theorem**:

- Wenn in einem Dreieck zwei Winkel einander gleich sind, müssen auch die den gleichen Winkeln gegenüberliegenden Seiten einander gleich sein.

Der **Satz des Pythagoras** ist Theorem 47 im 1. Buch.

Können Sie einen Beweis des Satzes von Pythagoras aus der nebenstehenden Skizze entnehmen? („Tänzerinnen-Beweis“)



1.3 David Hilbert: Geometrie als strenge axiomatische Theorie

Mehr als 2000 Jahre lang hatte sich der wissenschaftliche Aufbau der Geometrie an den "Elementen" des Euklid orientiert. Mit seinen "Grundlagen der Geometrie" setzte David Hilbert neue Maßstäbe:

- **Verzicht auf Definition der Grundbegriffe**. Sie werden vielmehr durch die Axiome als *implizit definiert* angesehen.
- **Schließung von Lücken**, etwa durch Axiome der Anordnung.
- Herausarbeitung der **Beziehung zwischen geometrischen Sätzen und algebraischen Eigenschaften** der zugehörigen Koordinatenbereiche.
- **Unabhängigkeit, Vollständigkeit und Widerspruchsfreiheit** als Qualitätsmerkmale des Axiomensystems.

Die geometrischen Beweise dürfen an keiner Stelle in irgendeiner Weise von der Anschauung oder von Erfahrungstatsachen Gebrauch machen, sie dürfen lediglich auf die in den Axiomen festgelegten

Beziehungen zwischen den undefinierten Grundbegriffen Bezug nehmen. Alle Beweise sollten im Prinzip so formalisiert sein, dass sie auch von einer Maschine durchgeführt werden könnten. Welche geometrischen Sätze allerdings als „wichtig“ oder „interessant“ anzusehen sind, das entscheiden aber natürlich noch immer Menschen.

Die Beweise müssen so sehr von der Anschauung losgelöst werden, dass Hilbert das klassische Zitat prägte:

"Man muss jederzeit an Stelle von 'Punkten', 'Geraden', 'Ebenen', 'Tische', 'Stühle', 'Bierseidel' sagen können."

Somit sind die Objekte der Geometrie nicht festgelegt. Hilbert konnte aber zeigen, dass alle Realisierungen seines Axiomensystems (so genannte Modelle des Axiomensystems) die gleiche Struktur besitzen, d.h. bis auf Isomorphie alle gleich sind. Solche Axiomensysteme, die bis auf Isomorphie nur ein einziges Modell besitzen, nennt man „kategorisch“.

Im Folgenden einige Auszüge aus

"Grundlagen der Geometrie" von David Hilbert

Einleitung:

Die Geometrie bedarf - ebenso wie die Arithmetik - zu ihrem folgerichtigen Aufbau nur weniger und einfacher Grundsätze. Diese Grundsätze heißen **Axiome der Geometrie**.

Die bezeichnete Aufgabe läuft auf die **logische Analyse unserer räumlichen Anschauung** hinaus.

Die vorliegende Untersuchung ist ein neuer Versuch, für die Geometrie ein **vollständiges und möglichst einfaches System von Axiomen** aufzustellen und aus denselben die wichtigsten geometrischen Sätze in der Weise abzuleiten, dass dabei die Bedeutung der verschiedenen Axiomgruppen und die Tragweite der aus den einzelnen Axiomen zu ziehenden Folgerungen klar zutage tritt.

.....

§ 1. Die Elemente der Geometrie und die fünf Axiomgruppen.

Erklärung.

Wir denken drei verschiedene Systeme von Dingen: die Dinge des ersten Systems nennen wir **Punkte** und bezeichnen sie mit A, B, C ; die Dinge des zweiten Systems nennen wir **Geraden** und bezeichnen sie mit a, b, c, ... ;

Wir denken die Punkte, Geraden, Ebenen **in gewissen gegenseitigen Beziehungen** und bezeichnen diese Beziehungen durch Worte wie "**liegen**", "**zwischen**", "**kongruent**"; die genaue und für mathematische Zwecke vollständige Beschreibung dieser Beziehungen erfolgt durch die **Axiome der Geometrie**.

Die Axiome der Geometrie können wir in fünf Gruppen teilen; jede einzelne dieser Gruppen drückt gewisse zusammengehörige Grundtatsachen unserer Anschauung aus. Wir benennen diese Gruppen von Axiomen in folgender Weise:

I	1-8.	Axiome der <i>Verknüpfung</i> ,
II	1-4.	Axiome der <i>Anordnung</i> ,
III	1-5.	Axiome der <i>Kongruenz</i> ,
IV		Axiom der <i>Parallelen</i> ,
V	1-2.	Axiome der <i>Stetigkeit</i> .

1.4 Die axiomatische Methode: Von Euklid zu Hilbert

Wir wollen sehen, welchen Status die geometrischen Objekte in der jeweiligen Auffassung haben.

Platon, Euklid (griechische Philosophie).

Platons Auffassung von der Welt und ihrer Erfassung durch den Menschen hat die Philosophie und auch die Mathematik über viele Jahrhunderte beeinflusst..

Die Welt besteht nach Platons Auffassung aus zwei Zonen:

Sichtbare, erfahrbare Welt	Welt der idealen Dinge
Die Sinne können die wahre Natur der Dinge nicht erfassen. Sinnestäuschungen.	Hier ist die wahre Natur der Dinge zu finden.
Erfahrungen, Experimente lassen nur Schatten der wirklichen Dinge erkennen	Nicht der unmittelbaren Erfahrung zugänglich, Idealisierungen. Die Wirklichkeit.
Sehr kleine Flecken, Kanten von Gegenständen, Oberflächen von Gegenständen	Idee des Punktes, Idee der Geraden, Idee der Ebene,

Euklids Axiome beschreiben die ideale Welt der existierenden geometrischen Objekte. Die so genannte „**Platonistische Auffassung der Mathematik**“ geht von einer vom Menschen unabhängigen Existenz mathematischer Sachverhalte aus.

Diese Auffassung lässt sich im berühmten „Höhlengleichnis“ von Platon finden.

Platons Höhlengleichnis (Aus dtv - Atlas Philosophie)

Der griechische Philosoph und Pädagoge Platon (427—347v. Chr.) schildert im 7. Buch der ‚Politeia‘ gleichnisartig das beschränkte Erkenntnisvermögen des Menschen — und die daraus resultierende Weltsicht der Selbstbescheidung.

- Nächstem, sprach ich, vergleiche dir unsere Natur in Bezug auf Bildung und Umbildung folgendem Zustande. Sieh nämlich Menschen wie in einer unterirdischen, höhlenartigen Wohnung, die einen gegen das Licht geöffneten Zugang längs der ganzen Höhle hat. In dieser seien sie von Kindheit an gefesselt an Hals und Schenkeln, so dass sie auf demselben Fleck bleiben und auch nur nach vorne hin sehen, den Kopf aber herumdrehen der Fessel wegen nicht vermögend sind. Licht aber haben sie von einem Feuer, welches von oben und von ferne her hinter ihnen brennt. Zwischen dem Feuer und den Gefangenen geht oben her ein Weg, längs diesem sich eine Mauer aufgeführt wie die Schranken, welche die Gaukler vor den Zuschauern sich erbauen, über welche herüber sie ihre Kunststücke zeigen.

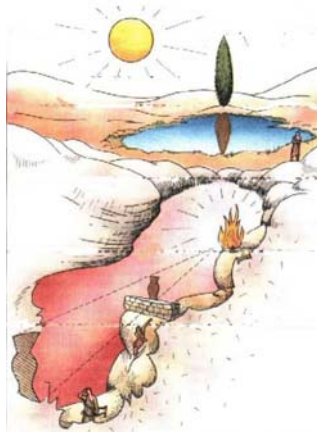
- Ich sehe, sagte er.

- Sieh nun längs dieser Mauer Menschen allerlei Geräte tragen, die über die Mauer herübertagen, und Bildsäulen und andere steinerne und hölzerne Bilder und von allerlei Arbeit; einige, wie natürlich, reden dabei, andere schweigen.

- Ein gar wunderliches Bild, sprach er, stellst du dar und wunderliche Gefangene.
- Uns ganz ähnliche, entgegnete ich. Denn zuerst, meinst du wohl, dass dergleichen Menschen von sich selbst und voneinander je etwas anderes gesehen haben als die Schatten, welche das Feuer auf die ihnen gegenüberstehende Wand der Höhle wirft?

- Wie sollten sie, sprach er, wenn sie gezwungen sind, zeitlebens den Kopf unbeweglich zu halten!

- Und von dem Vorübergetragenen nicht eben dieses?



- Was sonst?
- Wenn sie nun miteinander reden könnten, glaubst du nicht, dass sie auch pflegen würden, dieses Vorhandene zu benennen, was sie sähen?
- Notwendig.
- Und wie, wenn ihr Kerker auch einen Widerhall hätte von drüben her, meinst du, wenn einer von den Vorübergehenden spräche, sie würden denken, etwas anderes rede als der eben vorübergehende Schatten?
- Nein, beim Zeus, sagte er.
- Auf keine Weise also können diese irgendetwas anderes für das Wahre halten als die Schatten jener Kunstwerke?
- Ganz unmöglich.
- Nun betrachte auch, sprach ich, die Lösung und Heilung von ihren Banden und ihrem Unverstande, wie es damit natürlich stehen würde, wenn ihnen folgendes begegnete. Wenn einer entfesselt wäre und gezwungen würde, sogleich aufzustehen, den Hals herumdrehen, zu gehen und gegen das Licht zu sehn, und, indem er das täte, immer Schmerzen hätte und wegen des flimmernden Glanzes nicht recht vermöchte, jene Dinge zu erkennen, wovon er vorher die Schatten sah: was, meinst du wohl, würde er sagen, wenn ihm einer versicherte, damals habe er lauter Nichtiges gesehen, jetzt aber, dem Seienden näher und zu dem mehr Seienden gewendet, sähe er richtiger, und, ihm jedes Vorübergehende zeigend, ihn fragte und zu antworten zwänge, was es sei? Meinst du nicht, er werde ganz verwirrt sein und glauben, was er damals gesehen, sei doch wirklicher als was ihm jetzt gezeigt werde?
- Bei weitem, antwortete er.
- Und wenn man ihn gar in das Licht selbst zu sehen nötigte, würden ihm wohl die Augen schmerzen, und er würde fliehen und zu jenem zurückkehren, was er anzusehen im Stande ist, fest überzeugt, dies sei in der Tat deutlicher als das zuletzt gezeigte?
- Allerdings.

(In: Plato: Phaidon. Politeia. Sämtliche werke, Bd. III. Rowohlt's Klassiker, in der Übersetzung von Friedrich Schleiermacher, Hamburg 1958, Politeia, Siebentes Buch, S. 224 - 225) Die Grafik ist entnommen aus dtv - Atlas Philosophie.

Hilbert (Formalismus, moderne Mathematik)

Sichtbare, erfahrbare Welt	Unklar, was „die Wirklichkeit“ ist
Formale Beschreibungen von Beziehungen	Gibt es eine wahre Natur der Dinge? Die Ideale Welt des Platon und Euklid existiert hier nicht mehr!

Hilberts Axiome beschreiben in formaler Weise nur Beziehungen zwischen „geometrischen Objekten“. Sie regeln nur den *Umgang* mit den Begriffen, sagen aber nichts über deren *Existenz* aus.

Die zentralen Anliegen sind hier nur

- Widerspruchsfreiheit
- Vollständigkeit

Die axiomatisch gewonnene Mathematik kann nun dazu dienen, die „reale Welt“ zu erfassen.

„Formalistische Auffassung der Mathematik“:

Die Existenz mathematischer Sachverhalte ist bedeutungslos. Mathematik ist ein formales Herleiten von Aussagen aus Axiomen. Dabei werden nur unzweideutig formulierte Regeln verwandt, die auch von Maschinen angewandt werden könnten.

Konstruktivismus

Tatsächlich werden Mathematik und Naturwissenschaften weder formal betrieben noch werden Begriffe formal erworben. So sind tatsächlich geführte Beweise in der Regel eher als „gesellschaftlicher Prozess“ der Übereinkunft, dass die Argumente ausreichend seien denn als formale Herleitung zu sehen. So haben sich in den letzten 40 Jahren weitere Auffassungen von Mathematik entwickelt. Hier sei nur der in der Mathematikdidaktik immer wieder eingenommene Standpunkt des Konstruktivismus genannt.

Konstruktivisten befassen sich mit dem Prozess des Erwerbs von Begriffen und der Kommunikation über die „wirkliche Welt“.

Es gibt auch hier keine absolut existierende Welt, sondern jedes Individuum konstruiert *seine* Wirklichkeit.

1.5 Symmetrie und Abbildungen

Symmetrie ist einer der grundlegenden Begriffe der Geometrie. Symmetrie hat für das ästhetische Empfinden schon immer eine große Rolle gespielt, vielfach gibt es Beispiele aus der Kunst, wie z.B. wiederum die Werke von M.C.Escher zeigen. Auch in der Natur findet man stets einerseits Symmetrie, andererseits auch Brechungen von Symmetrie.

Symmetrie spielt auch für die Grundlagen der Naturwissenschaft eine zentrale Rolle. Schon seit dem Altertum wurde versucht, physikalische Gesetze auf Symmetrieforderungen zurückzuführen. Ein Beispiel dafür sind die Begründungen von J. Kepler für die Radien der Planetenbahnen im Sonnensystem mit Hilfe der so genannten platonischen Körper. Verständliche Informationen über die Bedeutung von Symmetrie für die Beschreibung der Welt finden sich in den nebenstehenden beiden Büchern.



Einige der Bilder von M.C.Escher zur Symmetrie



Der Begriff Symmetrie ist eng verbunden mit dem Begriff der **Abbildung**. Daher wird unsere Geometrieveranstaltung sich zunächst mit dem Abbildungsbegriff befassen.

Eine sehr allgemeine und weit reichende **Definition von Symmetrie** in der Ebene ist die folgende:

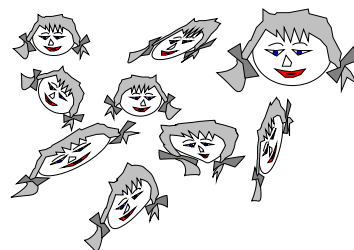
- Sei h eine Abbildung der Ebene E in sich und F eine Figur in der Ebene. F heißt **h -symmetrisch**, wenn $h(F)=F$ ist, d.h. wenn F invariant unter h ist.

Eine Frage, die mit dem Abbildungsbegriff klar beantwortet werden kann, ist die nach der „Gleichheit“ von Figuren:

Welche der nebenstehenden Figuren sind einander „gleich“?

Die Antwort: Das hängt davon ab, ob man Figuren als „gleich“ bezeichnet, die

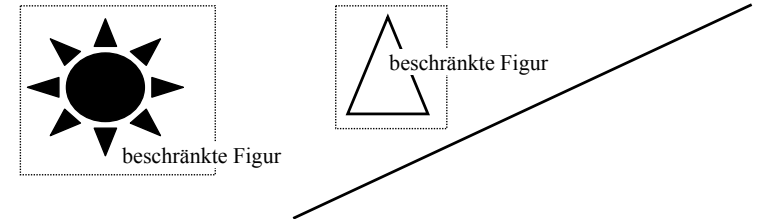
- identisch sind,
- durch Drehungen und Verschiebungen auseinander hervorgehen,
- durch Drehungen, Verschiebungen und Spiegelungen auseinander hervorgehen
- durch noch allgemeinere Abbildungen auseinander hervorgehen.



In der Schulgeometrie meint man meist, eine Figur sei eindeutig bestimmt, wenn sie *bis auf Kongruenzabbildungen* eindeutig festgelegt ist.

1.6 Definitionen und Sprechweisen:

- Mit E bezeichnen wir die Anschauungsebene (unbegrenzt ausgedehnte Zeichenebene, Tafelenebene, ...)
- Unter einer (ebenen) **Figur** verstehen wir eine nichtleere Teilmenge F der Ebene E .
- Eine Figur heißt **beschränkt**, wenn sie ganz in einem Rechteck eingeschlossen werden kann.



Abbildungen der Ebene in sich

Beispiel: Verschiebung der Ebene mit Hilfe einer Transparent-Folie.

Jeder Punkt der Ebene soll in eine feste Richtung um die gleiche Strecke verschoben werden. Richtung und Verschiebungslänge gibt man oft durch einen Pfeil an, den man Verschiebungsvektor nennt. Verschiedene Pfeile gleicher Länge und gleicher Richtung beschreiben die gleiche Verschiebung.

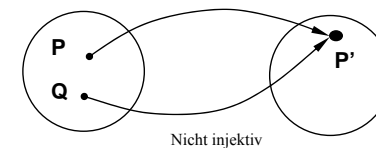
Man kann sich vorstellen, man habe ein Blatt Papier (die Ebene E) und eine Transparentfolie (auch die Ebene E) darauf. Markiert man auf der Folie Punkte und verschiebt die Folie, so wird jedem Punkt P auf der Folie ein darunter liegender Punkt P' auf dem Papier zugeordnet. Dies gibt eine Abbildung von E in E .



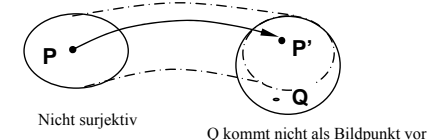
- Eine Abbildung f der Ebene E in sich ist eine Zuordnung, die jedem Punkt P der Ebene E eindeutig einen Bildpunkt P' zuordnet.

Wir schreiben $f: E \rightarrow E$
 $f: P \mapsto P'$

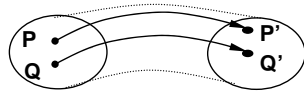
- Eine Abbildung heißt **injektiv**, wenn keine zwei verschiedenen Punkte den gleichen Bildpunkt besitzen.



- Eine Abbildung heißt **surjektiv**, wenn jeder Punkt aus E als Bildpunkt vorkommt.



- Eine Abbildung heißt *bijektiv*, wenn sie *injektiv* und *surjektiv* ist.

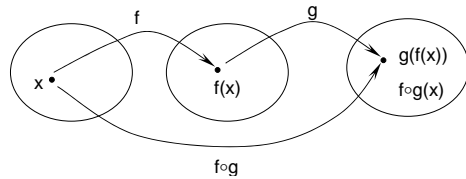


Keine zwei verschiedenen Punkte haben gleiche Bildpunkte

Alle Punkte kommen als Bildpunkte vor

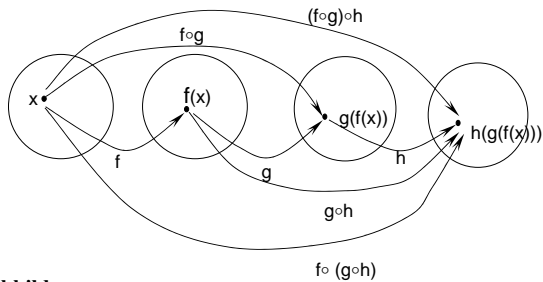
Hintereinanderausführen von Abbildungen $E \rightarrow E$

- Es seien $f: E \rightarrow E$ und $g: E \rightarrow E$ Abbildungen der Ebene E in sich. Die Verkettung $f \circ g: E \rightarrow E$ wird erklärt durch $f \circ g(x) = g(f(x))$. Zuerst wird f ausgeführt; auf das Ergebnis $f(x)$ wird g angewandt!



Satz 1.1

- a) Assoziativgesetz $(f \circ g) \circ h = f \circ (g \circ h)$
- b) Das Kommutativgesetz gilt nicht: im Allgemeinen ist $f \circ g \neq g \circ f$ (Begründung?)

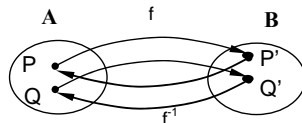


Inverse einer Abbildung

Ist f eine bijektive Abbildung $A \rightarrow B$, dann kann man f umkehren, d.h. jedem Bildpunkt wird sein eindeutig bestimmter Urbildpunkt zugeordnet. Die so definierte Abbildung wird mit f^{-1} bezeichnet und Inverse zu f oder Umkehrabbildung zu f genannt.

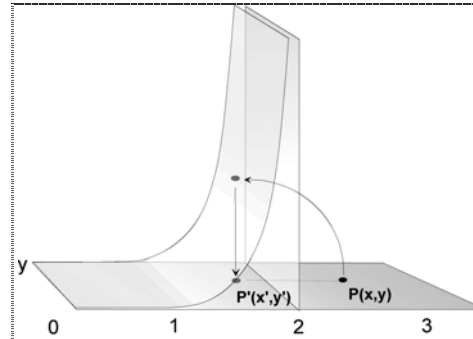
Für f^{-1} gilt: $f \circ f^{-1} = id_A$ und $f^{-1} \circ f = id_B$. Dabei sind id_A und id_B die *identischen Abbildungen* auf A bzw. auf B .

Für die identische Abbildung id_A einer Menge A auf sich ist $f \circ id_A = id_A \circ f = f$ für alle Abbildungen f von A nach A .



Jedem Bildpunkt P' wird durch f^{-1} sein Urbild P zugeordnet

Weitere Beispiele für Abbildungen der Ebene in sich

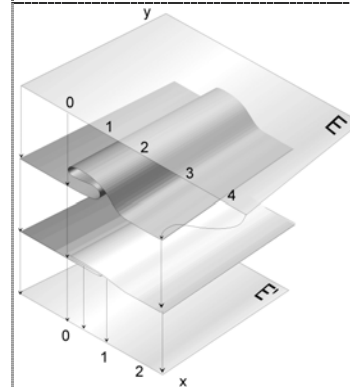


Welche Abbildungseigenschaften liegen vor: injektiv, surjektiv, bijektiv?

Worauf werden Geraden abgebildet?

Prüfen Sie an ausgewählten Punkten, dass durch die unten stehende Vorschrift eine solche Abbildung angegeben wird.

$$(x, y) \mapsto \begin{cases} (x, y) & \text{für } x \leq 1 \\ \left(2 - \frac{1}{x}, y\right) & \text{für } x > 1 \end{cases}$$

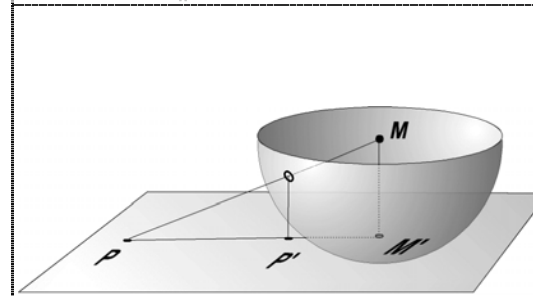


Welche Abbildungseigenschaften liegen vor: injektiv, surjektiv, bijektiv?

Worauf werden Geraden abgebildet?

Prüfen Sie an ausgewählten Punkten, dass durch die unten stehende Vorschrift eine solche Abbildung angegeben wird.

$$(x, y) \mapsto \begin{cases} (x, y) & \text{für } x \leq 1 \\ (2-x, y) & \text{für } 1 < x \leq 2 \\ (x-2, y) & \text{für } x > 2 \end{cases}$$



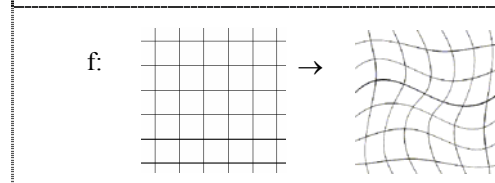
Welche Abbildungseigenschaften liegen vor: injektiv, surjektiv, bijektiv?

Worauf werden Geraden abgebildet?

Prüfen Sie an ausgewählten Punkten, dass durch die unten stehende Vorschrift eine solche Abbildung angegeben wird.

$$x' = \frac{x}{\sqrt{x^2 + y^2 + 1}}$$

$$y' = \frac{y}{\sqrt{x^2 + y^2 + 1}}$$



Können sie im Bild eine Abbildung der Ebene in sich erkennen?

Beschreiben Sie diese Abbildung. Wie wird sie gewonnen?

Welche Abbildungseigenschaften liegen vor: injektiv, surjektiv, bijektiv?

Worauf werden Geraden abgebildet?

Beispiel aus der Kunst

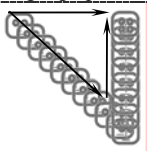
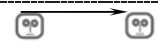
In der Kunst findet man viele Abbildungen der Ebene in sich, die seltsame Eigenschaften haben. Ein sehr bekannter Künstler, der mit den Mitteln der Mathematik spielt, ist M.C.Escher. Als Beispiel dient hier eines seiner Bilder; es ist nur das *Abbild* der Ebene gezeigt.

- Können sie im Bild eine Abbildung der Ebene in sich erkennen? Beschreiben Sie diese Abbildung. Wie wird sie gewonnen?
- Welche Abbildungseigenschaften liegen vor: injektiv, surjektiv, bijektiv?
- Worauf werden Geraden abgebildet?

f: ? →

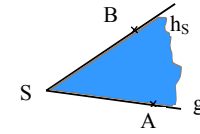
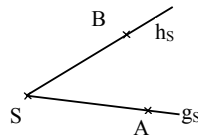


Unterschiede zwischen dem Abbildungsbegriff in der Mathematik und dem der Physik bzw. Umgangssprache

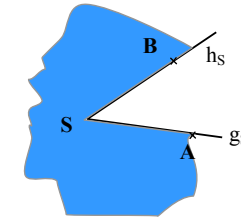
Umgangssprache	Mathematik
 <p>Der Weg ist bedeutsam. („Kratzer im Parkett“)</p> <p>Die Verkettung der beiden Verschiebungen kann ersetzt werden durch eine Verschiebung.</p>	 <p>Nur das Ergebnis ist bedeutsam.</p> <p>Die Abbildung ist eine Menge von Punktepaaren (P, P'), $P, P' \in E$</p> <p>Die Verkettung der beiden Verschiebungen ist eine Verschiebung.</p>
<p>Objekte oder Figuren werden bewegt, z.B. Dreiecke verschoben. Man denkt sich die Ebene als fest</p>	<p>Alle Punkte der Ebene werden abgebildet. Da Figuren Teilmengen der Ebene sind, werden auch sie dabei abgebildet.</p> <p>Dennoch werden wir die umgangssprachliche Sprechweise benutzen.</p> <p>Ist f eine Abbildung $E \rightarrow E$ und M eine Teilmenge von E, dann schreibt man $f(M)$ für $\{f(P) \mid P \in M\}$.</p>

Winkelbegriffe

Zwei Halbgeraden g_s und h_s mit gemeinsamem Anfangspunkt S bilden eine Winkelfigur. Diese Winkelfigur legt zwei Winkelfelder fest, ein inneres und ein äußeres, wenn die Halbgeraden nicht auf einer Geraden liegen.



Winkel $\angle g_s, h_s$
Winkel $\angle ASB$



Winkel $\angle h_s, g_s$
Winkel $\angle BSA$

Um diese Winkelfelder zu unterscheiden, führt man eine Orientierung von Winkeln ein.

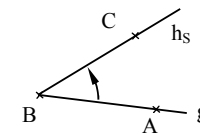
Unter $\angle g_s, h_s$ wollen wir das Winkelfeld verstehen, das überstrichen wird, wenn g_s im Gegenuhrzeigersinn um S auf h_s gedreht wird. Hier bezeichnet also $\angle g_s, h_s$ das innere Winkelfeld, $\angle h_s, g_s$ das äußere Winkelfeld. Statt Winkelfeld sagen wir auch einfach Winkel.

Werden die Halbgeraden durch Punkte A, B, S bestimmt, so bezeichnet man die Winkel entsprechend: $\angle ASB$ ist der Winkel, der überstrichen wird, wenn die Halbgerade g_s mit Anfangspunkt S und Punkt A auf die Halbgerade h_s mit Anfangspunkt S und Punkt B gedreht wird.

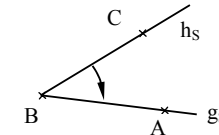
Winkel können in Grad gemessen und in ihrer Größe verglichen werden. Dieser „Messprozess“ bereitet bei einem axiomatischen Vorgehen große Probleme, die bei unserem intuitiven Vorgehen nicht thematisiert werden sollen; wir gehen davon aus, dass dieser Messprozess vertraut ist. Wir unterscheiden in der Bezeichnung auch nicht zwischen Winkel und Winkelmaß.

Winkelmaße nehmen in diesem Sinne nur Werte aus dem Bereich $[0^\circ, 360^\circ]$ an.
Ein Winkel von 360° ist gleich groß wie ein Winkel von 0° .
Winkelfelder werden stets im mathematisch positiven Sinn notiert.

In technischen oder physikalischen Anwendungen, wenn bei Drehungen etwa der Verlauf der Drehung und nicht nur Anfangszustand und Endzustand von Bedeutung sind, ist es wichtig, orientierte Winkel zu betrachten.



positiver orientierter Winkel



negativer orientierter Winkel

In diesem Sinne sind auch Winkelmaße mit Werten größer als 360° sinnvoll. So kann man etwa die Umdrehung eines Karussells mit -900° angeben: Das Karussell hat sich zweieinhalb mal im Uhrzeigersinn gedreht.

Wir werden in der Geometrie auch negative Winkel und Winkel mit Maßen über 360° benutzen, um intuitive Bezeichnungen zu ermöglichen und Berechnungen zu erleichtern. Diese Winkel sind aber stets **gleich** einem nicht orientierten Winkel mit Maß aus dem Bereich $[0^\circ, 360^\circ]$

Wenn wir in der Geometrie Drehungen betrachten, dann ist ein Winkel mit Maß -40° **gleich** einem Winkel mit 320° , und ein Winkel von 420° **gleich** einem Winkel von 60° .

Bemerkung zu Dynamischen Geometrie Systemen auf dem Computer:

Wenn bei der Winkelbezeichnung die Orientierung nicht berücksichtigt wird, dann kann nicht zwischen innerem und äußerem Winkelfeld unterschieden werden. Da Winkolorientierung Schülern Schwierigkeiten bereitet, kann man im System „DynaGeo“ bei der Grundeinstellung wählen, ob Winkolorientierung berücksichtigt wird oder nicht. Ohne Orientierung können dann nur Winkel zwischen 0° und 180° gemessen werden.

Parallele Geraden

Es gibt mehrere Möglichkeiten, Parallelität von Geraden zu definieren. Wir wollen definieren:

- Zwei Geraden g und h heißen *parallel*, wenn sie beide auf einer dritten Geraden k senkrecht stehen. Wir schreiben dafür $g \parallel h$.

Nach dieser Definition gilt insbesondere $g \parallel g$!

Unter Voraussetzung von genügend vielen Axiomen (aber wir wollen uns hier bewusst nicht mit einer strengen Axiomatik befassen) kann man folgern:

- $g \parallel h$ und $g \neq h \Leftrightarrow g$ und h haben keinen gemeinsamen Punkt.
- $g \parallel h \Leftrightarrow g$ und h haben überall den gleichen Abstand.

Diese beiden Eigenschaften könnte man auch zur Definition von Parallelität verwenden. Die Definition über die erste Eigenschaft lautete dann

- $g \parallel h \Leftrightarrow g$ und h haben keinen gemeinsamen Punkt oder $g=h$.

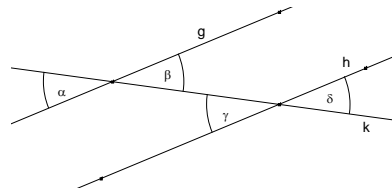
Einige Bemerkungen zur „Axiomatik“

Wie zuvor schon oft bemerkt, wollen wir hier keine axiomatische Geometrie betreiben, wollen aber selbstverständlich, unter Verwendung von hinreichend vielen nicht weiter begründeten Voraussetzungen, geometrische Sätze beweisen. Diese Voraussetzungen können wir als Axiome auffassen, wobei wir weder nach Unabhängigkeit noch nach Lückenlosigkeit streben; wir werden viele dieser „Axiome“ auch nicht explizit erwähnen. Dazu sei auf die entsprechende Literatur verwiesen.

Folgende Sachverhalte, die wir immer wieder im Sinne von Axiomen verwenden wollen, sollen hier noch einmal kurz festgehalten werden.

Winkel an geschnittenen Parallelen

- Die Parallelen $g, h, g \neq h$, werden von einer Geraden k geschnitten. Dann sind
 - die *Stufenwinkel* α und γ gleich groß,
 - die *Wechselwinkel* β und γ bzw. α und δ gleich groß.

**Sätze über die Größe von Seitenlängen und Winkelgrößen in Dreiecken (Kongruenzsätze)**

Die aus der Schule geläufigen „Kongruenzsätze“ in der folgenden Form („sww“ als Beispiel):

- Stimmen zwei Dreiecke in zwei Seiten(längen) und der Größe des eingeschlossenen Winkels überein, dann stimmen sie auch in allen anderen Seitenlängen und Winkelgrößen überein.

1.7 Konstruktionen mit Zirkel und Lineal

Wenn wir von „Konstruktionen“ sprechen, dann meinen wir stets „Konstruktionen mit Zirkel und Lineal“. Dabei versteht man unter einem Lineal ein Gerät ohne Skaleneinteilung, nur zum Zeichnen gerader Linien. Bei Konstruktionen mit Zirkel und Lineal dürfen nur die folgenden Schritte durchgeführt werden:

1. Beliebigen Punkt zeichnen.
2. Beliebigen Punkt auf einer Geraden, Strecke oder Kreislinie zeichnen.
3. Gerade durch zwei Punkte zeichnen (Lineal).
4. Zwei Punkte durch eine Strecke verbinden (Lineal).
5. Schnittpunkte von Geraden, Strecken und Kreislinien zeichnen.
6. Kreis um einen gegebenen Mittelpunkt M durch einen weiteren Punkt P zeichnen (Zirkel).
7. Kreis um einen gegebenen Mittelpunkt M mit einem Radius zeichnen, der von zwei (schon konstruierten oder gegebenen) Punkten übernommen werden kann (Zirkel).
"Radius aus der Zeichnung in den Zirkel übernehmen und damit einen Kreis zeichnen".

Wenn wir davon sprechen, eine Streckenlänge oder ein Winkelmaß sei gegeben, dann meinen wir, dass ein Objekt mit diesen Maßen vorgegeben ist, es also nicht konstruiert werden muss. Gegebene Streckenlängen und Winkel müssen prinzipiell mit Zirkel und Lineal übertragen werden, dürfen also nicht abgemessen werden.

Nachdem einige Grundkonstruktionen mit Zirkel und Lineal als durchführbar erkannt wurden, lassen wir diese als „Module“ in späteren Konstruktionen zu. Sie werden in Konstruktionsbeschreibungen als Ganzes aufgeführt. Bei der Durchführung einer Konstruktion dürfen dafür auch die üblichen Zeichenhilfsmittel verwandt werden:

- Senkrechte zu Geraden oder Strecken durch einen Punkt \rightarrow Geodreieck.
- Parallele zu Geraden oder Strecken durch einen Punkt \rightarrow Geodreieck.
- Abtragen einer gegebenen Streckenlänge auf einer Geraden \rightarrow Lineal mit Maßstab.
- Übertragen einer gegebenen Winkelgröße an eine Gerade in einem Punkt \rightarrow Winkelmesser.

In den Übungen sollen Sie zeigen, dass solche Grundkonstruktionen mit Zirkel und Lineal alleine durchführbar sind. In „DynaGeo“ stehen Hilfsmittel für diese Grundkonstruktionen ebenfalls zur Verfügung.

Aufgabe

Im Folgenden sollen Kenntnisse aus der SI-Geometrie verwandt werden. Konstruieren Sie mit Zirkel und Lineal:

1. zu einer Strecke \overline{AB} die Mittelsenkrechte von \overline{AB} ,
2. zu einer Strecke \overline{AB} den Mittelpunkt \overline{AB} ,
3. zu einem Punkt P und einer Geraden g das Lot von P auf g ,
4. zu einem Punkt P und einer Geraden g den an g gespiegelten Punkt P' ,
5. zu einem Punkt P und einer Geraden g die zu g parallele Gerade h durch P ,
6. zu zwei sich schneidenden Geraden g, h die Winkelhalbierende des Winkels $\angle(g, h)$ ($\angle(g, h)$ ist der Winkel, der bei Drehung von g auf h im Gegenuhrzeigersinn überstrichen wird),
7. zu einer Strecke \overline{AB} die Punkte, die \overline{AB} dritteln,
8. zu drei Punkten P, Q, R , die nicht auf einer Geraden liegen, den Kreis, der durch P, Q und R geht,
9. zu einem gegebenen Winkel $\angle(g, h)$ den an einen Strahl k mit Startpunkt P im Gegenuhrzeigersinn angetragenen gleich großen Winkel.

- Führen Sie diese Konstruktionen ohne Computer durch. Geben Sie eine Konstruktionsbeschreibung.
- Führen Sie diese Konstruktionen mit DynaGeo durch. Dabei dürfen Sie nur die folgenden Hilfsmittel verwenden:

1. Basispunkt (freien Punkt zeichnen),
2. Punkt auf einer Linie,
3. Gerade durch 2 Punkte
4. Strecke zwischen 2 Punkten,
5. Schnittpunkt zweier Linien,
6. Kreis um Mittelpunkt durch Kreispunkt.

Ein dem Konstruktionsschritt 7 ("Radius aus der Zeichnung in den Zirkel übernehmen und damit einen Kreis zeichnen") entsprechendes Hilfsmittel steht in DynaGeo so nicht zur Verfügung. Es muss durch mehrere andere Schritte ersetzt werden (diese Konstruktion kann als „Makro“ festgehalten werden und steht dann auch als Grundkonstruktion zur Verfügung).

Beispiel einer Konstruktion mit Zirkel und Lineal in DynaGeo

Gegeben: a, b, c .

Konstruiere das Dreieck ABC mit den Seitenlängen a, b, c .

In DynaGeo:

Konstruktionstext aus DynaGeo übernommen (mit leichten Änderungen):

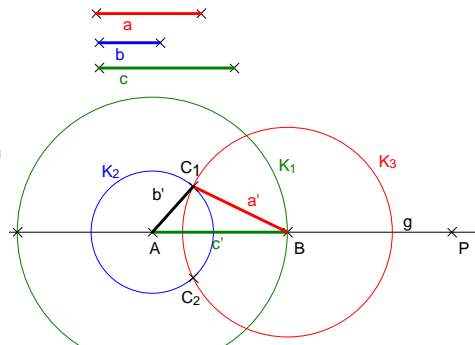
Voraussetzungen:

P_1 ist ein freier Basispunkt, P_2 ist ein freier Basispunkt,
 P_3 ist ein freier Basispunkt, P_4 ist ein freier Basispunkt
 P_5 ist ein freier Basispunkt, P_6 ist ein freier Basispunkt

a ist die Strecke $[P_1; P_2]$
 b ist die Strecke $[P_3; P_4]$
 c ist die Strecke $[P_5; P_6]$

Konstruktion:

A ist ein freier Basispunkt
 P ist ein freier Basispunkt
 g ist die Gerade (A ; P)
 K_1 ist ein Kreis um A mit Radius c (Makro)
 B ist ein Schnittpunkt der Linie g mit dem Kreis K_1
 K_2 ist ein Kreis um A mit Radius b (Makro)
 K_3 ist ein Kreis um B mit Radius a (Makro)
 C_1 ist ein Schnittpunkt der Kreise K_2 und K_3
 C_2 ist der 2. Schnittpunkt der Kreise K_2 und K_3
 c' ist die Strecke $[A; B]$
 a' ist die Strecke $[B; C_1]$
 b' ist die Strecke $[C_1; A]$



Ohne DynaGeo:

Gegeben: a, b, c

Konstruiere das Dreieck ABC mit den Seitenlängen a, b, c .

Konstruktionstext für die Konstruktion:

Ausführlich

Punkt A
 Gerade g durch A
 K_1 ist ein Kreis um A mit Radius c
 B ist ein Schnittpunkt der Geraden g mit Kreis K_1
 K_2 ist ein Kreis um A mit Radius b

Sehr kurz

} Strecke $\overline{AB} = c$
 $K_2(A, b)$

K_3 ist ein Kreis um B mit Radius a
 C_1 ein Schnittpunkt der Kreise K_2 und K_3
 C_2 2. Schnittpunkt der Kreise K_2 und K_3
 c' ist die Strecke $[A; B]$
 a' ist die Strecke $[B; C_1]$
 b' ist die Strecke $[C_1; A]$

$K_3(B, a)$
 C_1 ein Schnittpunkt K_2, K_3
 C_2 der 2. Schnittpunkt K_2, K_3
 $C = C_1$ oder $C = C_2$

Dreieck ABC

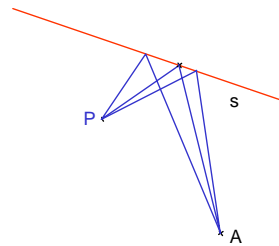
2 Kongruenzabbildungen

2.1 Geradenspiegelungen

a) Spiegel

Wie wirkt ein Spiegel?

Warum glauben wir, zu jedem Punkt vor dem Spiegel gäbe es hinter dem Spiegel einen entsprechenden Punkt im gleichen Abstand von der Spiegelfläche?



Modellvorstellung:

- Jeder beleuchtete Punkt P sendet nach allen Seiten Lichtstrahlen aus.

Wie verlaufen die Lichtstrahlen von P über S nach A? Fermat behauptet:

Fermat-Prinzip (Pierre de Fermat, 1601 – 1665)

Licht wählt unter allen möglichen Wegen den kürzesten (im homogenen Medium; sonst den schnellsten)

Was ist der kürzeste Weg von P über S nach A?

Begründung des Reflexionsgesetzes mit dem Fermat-Prinzip

Frage: Wie muss ein Lichtstrahl von P aus über die Spiegelgerade s zum Punkt A laufen, damit der Weg möglichst kurz ist?

Von P aus läuft ein Lichtstrahl zum Punkt F auf der Spiegelfläche und von dort zu Punkt A. F ist so zu bestimmen, dass die gesamte Weglänge $|\overline{PF}| + |\overline{FA}|$ möglichst kurz wird.

Dazu legen wir P' so fest, dass s die Mittelsenkrechte zu $\overline{PP'}$ ist. Damit ist $|\overline{PF}| = |\overline{P'F}|$, und deshalb die gesamte Weglänge $|\overline{PF}| + |\overline{FA}| = |\overline{P'F}| + |\overline{FA}|$.

Die Weglänge ist dann minimal, wenn F auf der Strecke $\overline{P'A}$ liegt, in allen anderen Fällen ist $|\overline{P'F}| + |\overline{FA}| > |\overline{P'A}|$, da in jedem Dreieck die Summe von zwei Seitenlängen größer als die Länge der dritten Seite ist.

Daraus folgt das **Reflexionsgesetz**:

- Einfallender Strahl, Lot und reflektierter Strahl liegen in einer Ebene (Einfallsebene) senkrecht zur Spiegelebene
- Einfallswinkel und Reflexionswinkel sind gleich.

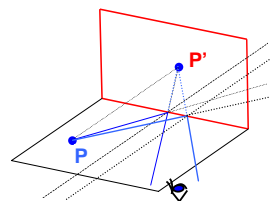
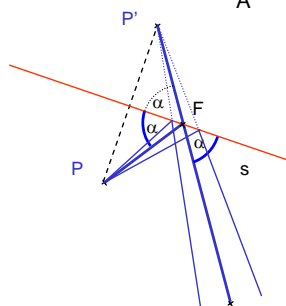
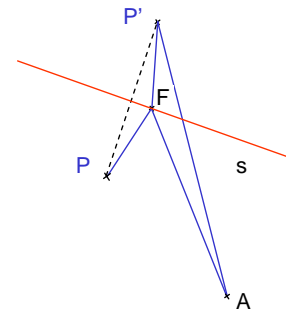
Nach dem Fermat-Prinzip verläuft Licht zwischen den Punkten P und A über die Spiegelfläche s so, dass es geradlinig vom konstruierten Punkt P' herzukommen scheint, da dies der kürzeste mögliche Weg ist.

Betrachtet man mehrere Strahlen, die vom Punkt P ausgehen, dann zeigt sich:

- Die reflektierten Strahlen *scheinen* für das Auge *alle* von *einem* Punkt P' herzukommen, der auf der anderen Seite des Spiegels auf dem Lot durch P im gleichen Abstand wie P liegt.

Beschränken wir uns auf die Betrachtung der Einfallsebene, dann wird die Spiegelebene zur Spiegelebene.

So ergibt sich aus der **Räumlichen Spiegelung** der Physik die **Geradenspiegelung** in der Mathematik.



b) Definition der Geradenspiegelung

Beispiele für handelndes Durchführen von Geradenspiegelungen:

- Falten und Klebsen; Falten und Schneiden; Falten und Kohlepapier; Falten und Durchstechen
- kariertes Papier

Definition 2.1

Es sei g eine Gerade der Ebene E .

Eine Abbildung $S_g : E \rightarrow E$ heißt **Geradenspiegelung (Achsenspiegelung)**

\Leftrightarrow für jeden Punkt P und seinen Bildpunkt P' gilt:

Ist $P \notin g$, so ist g die Mittelsenkrechte von $\overline{PP'}$

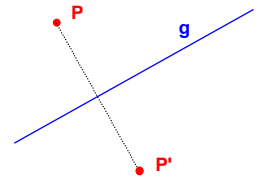
Ist $P \in g$, so ist $P' = P$.

Eigenschaften einer Geradenspiegelung S_g :

Die Umkehrabbildung einer Geradenspiegelung S_g ist die selbe Geradenspiegelung $S_g : S_g^{-1} = S_g$

Ein Punktepaar (P, P') ($P \neq P'$) legt die Abbildung eindeutig fest.

Zu zwei verschiedenen Punkten P, Q gibt es genau eine Achsenspiegelung S_g mit $S_g(P) = Q$.



Fixelemente von S_g :

Fixpunkte: alle Punkte von g

Fixpunktgerade: g

Fixgeraden: g ; alle Senkrechten zu g

Invarianten:

geradentreu

längentreu

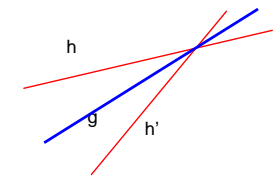
winkelmaßtreu

flächenehaltend

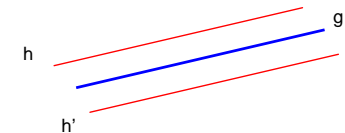
nicht umlaufsinnreu

Weitere, hieraus und aus der Definition beweisbare Eigenschaften einer Geradenspiegelung S_g (\rightarrow Übungen)

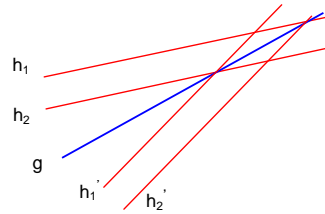
Ist $h \nparallel g$, so schneiden sich h und h' auf g und g halbiert den Winkel zwischen h und h' .



Ist $h \parallel g$, so ist g Mittelparallele des von h und h' begrenzten Parallelstreifens.



Ist $h_1 \parallel h_2$, so ist auch $h_1' \parallel h_2'$.



Geradenspiegelungen sind „parallelentreu“

Bemerkung: Die Geradentreue lässt sich nicht ohne weiteres aus der Definition und den in Kapitel 1 genannten „Axiomen“ ableiten, sondern müsste als neues „Axiom“ gefordert werden. Die Längentreue und Winkelmaßtreue dagegen könnte man ableiten.

2.2 Definition und Eigenschaften von Kongruenzabbildungen

Definition 2.2

Eine Abbildung $f: E \rightarrow E$ heißt **Kongruenzabbildung**
 $\Leftrightarrow f$ ist bijektiv, geradentreu, längentreu.

Satz 2.1

Jede Geradenspiegelung ist eine Kongruenzabbildung.

Satz 2.2

Die Verkettung von zwei Geradenspiegelungen ist eine Kongruenzabbildung.

Folgende Probleme im Zusammenhang mit Kongruenzabbildungen sollen behandelt werden:

- Gibt es außer den Achsenspiegelungen noch weitere Kongruenzabbildungen?
- Welche Typen können das sein? Kann man sie einfach klassifizieren?
- Welche Typen von Kongruenzabbildungen erhält man, wenn man mehrere Achsenspiegelungen hintereinander ausführt?

Bevor wir uns mit der Verkettung von Achsenspiegelungen im Einzelnen befassen, sollen noch einige Eigenschaften von Kongruenzabbildungen bewiesen werden. Dabei verwenden wir wiederum alle in Kapitel 1.6 aufgeführten „Axiome“.

Satz 2.3

Die Verkettung von zwei Kongruenzabbildungen ist eine Kongruenzabbildung.

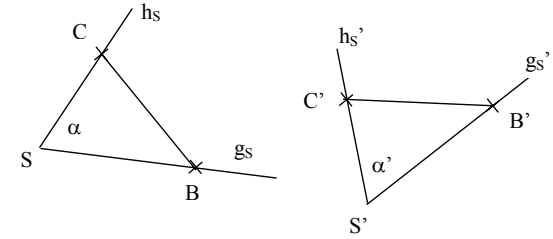
Satz 2.4

Jede Kongruenzabbildung ist winkelmäÙtreu und flächeninhaltenstreu.

Beweis:

Winkeltreue:

Durch die Halbgeraden g_s, h_s sei ein Winkel α gegeben, der Bildwinkel α' sei $\angle g_s', h_s'$. Wähle auf g_s einen Punkt B und auf h_s einen Punkt C. Für das Bilddreieck $S'B'C'$ ist wegen der Längentreue der Kongruenzabbildungen $\overline{SB} = \overline{S'B'}$, $\overline{BC} = \overline{B'C'}$, $\overline{CS} = \overline{C'S'}$. Damit stimmen die Dreiecke auch in allen Winkeln überein und insbesondere ist $\alpha' = \alpha$.



Flächeninhaltenstreu:

Wir zeigen im Vorgriff auf die späteren Ausführungen zum Flächeninhaltsbegriff, dass der Flächeninhalt von Rechtecken erhalten bleibt, da alle Flächeninhalte mit Hilfe von Rechtecken gemessen werden. Das Bild eines Rechtecks ABCD ist wieder ein Rechteck, da Kongruenzabbildungen winkelmäÙtreu sind. Die Seitenlängen des Bildrechtecks $A'B'C'D'$ stimmen wegen der Längentreue mit denen von ABCD überein und daher ist auch der Flächeninhalt der gleiche.

Satz 2.5

Jede Kongruenzabbildung ist parallelentreu.

Beweis:

Folgt unmittelbar aus der Geradentreue und der Bijektivität von Kongruenzabbildungen (Übungsaufgabe).

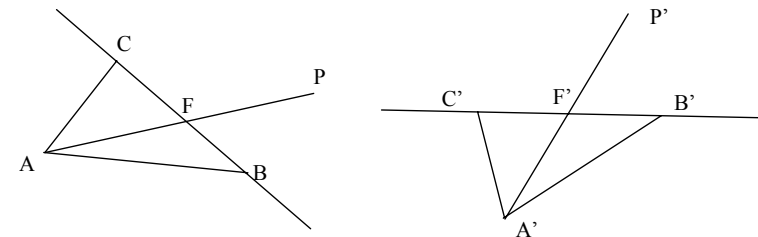
Satz 2.6

Durch das Abbilden eines einzigen Dreiecks ist eine Kongruenzabbildung eindeutig festgelegt.

Beweis²:

Das Bild eines (nicht ausgearteten) Dreiecks ABC sei $A'B'C'$. Sei P ein beliebiger Punkt der Ebene. Wir müssen zeigen, dass das Bild von P eindeutig festgelegt ist. Dazu zeichnen wir die Gerade AP (für $P \neq A$).

1. Fall: AP schneidet die Gerade BC in einem Punkt F. Der Bildpunkt F' von F liegt auf $B'C'$ und ist eindeutig bestimmt, da wegen der Geradentreue und Längentreue $\overline{BF} = \overline{B'F'}$ und $\overline{CF} = \overline{C'F'}$. P' muss auf $A'F'$ liegen. Wegen der Längentreue ist $\overline{F'P'} = \overline{FP}$, und damit ist P' eindeutig bestimmt.



Übung: Zeichnen Sie Skizzen, bei denen F nicht zwischen B und C liegt und prüfen Sie, ob dann die Argumentation oben ebenfalls richtig ist. Zeichnen Sie Skizzen für viele verschiedene Lagen von F

2. Fall: AP schneidet die Gerade BC nicht. \Rightarrow Übung.

3. Fall: $P=A$. AP ist nicht definiert. Wegen $P'=A'$ ist P' wiederum eindeutig festgelegt.

² Dieser Satz gilt sogar ganz allgemein für bijektive, geradentreue Abbildungen der Ebene.

2.3 Hintereinanderausführen von 2 Achsenspiegelungen³

Satz 2.7

Die Hintereinanderausführung von 2 Achsenspiegelungen ist eine Drehung oder eine Verschiebung.

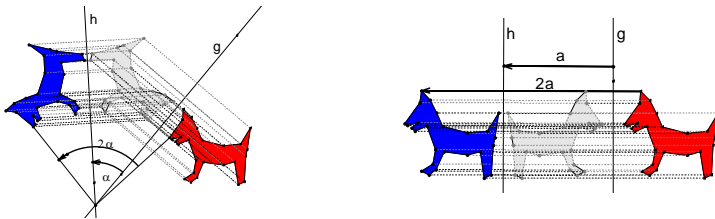
Dabei gilt:

Schneiden sich die beiden Achsen in Z unter $\angle \alpha$, so lässt sich die Zweifachspiegelung durch eine Drehung um Z um $\angle 2\alpha$ ersetzen.

Dabei legt die Reihenfolge der Achsenspiegelungen den Winkel fest: α ist der Winkel, der überstrichen wird, wenn die erste Spiegelachse im Gegenuhrzeigersinn auf die zweite Spiegelachse gedreht wird.

Sind die beiden Achsen parallel im Abstand a, so lässt sich die Zweifachspiegelung durch eine Verschiebung um 2a senkrecht zur Achsenrichtung ersetzen.

Dabei legt die Reihenfolge der Achsenspiegelungen die Richtung der Verschiebung fest: Die Verschiebung erfolgt von der ersten Spiegelachse auf die zweite Spiegelachse zu.



Beweis von Satz 2.7:

Gegeben sei die Verkettung der Spiegelung S_g mit S_h .

1. Fall: Die beiden Spiegelachsen g und h fallen zusammen.

Dann ist $S_g = S_h$ und damit $S_g \circ S_h = id$. id kann man als Spezialfall einer Drehung um 0° oder einer Verschiebung um den Nullvektor auffassen.

2. Fall: Die beiden Spiegelachsen g und h schneiden sich in einem Punkt Z unter dem Winkel α .

Dabei ist α der Winkel, der überstrichen wird, wenn man g im Gegenuhrzeigersinn auf h dreht.

Sei P ein beliebiger Punkt, $P' = S_g(P)$ und $P'' = S_h(P')$. Wir untersuchen, wie sich P'' aus P ergibt.

Behauptung: P'' geht aus P durch Drehung um den Punkt Z um den Winkel 2α hervor.

Wir müssen alle möglichen Lagen von P, P' und P'' bezüglich der Achsen g und h betrachten.

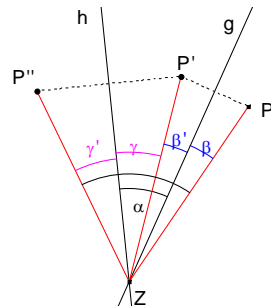
1. Unterfall:

P liegt so, dass P' und P'' wie in der nebenstehenden Abbildung liegen.

1. Behauptung: P, P' und P'' liegen auf einem Kreisbogen um Z.

Klar, da wegen der Längentreue von S_g und S_h gilt

$$\overline{ZP} = \overline{ZP'} = \overline{ZP''}$$



³ Die Definitionen von Verschiebung und Drehung finden sich auf S. 25 ff

2. Behauptung: $\angle PZP'' = 2\alpha$.

Wegen der Winkeltreue von S_g und S_h ist $\beta = \beta'$ und $\gamma = \gamma'$.

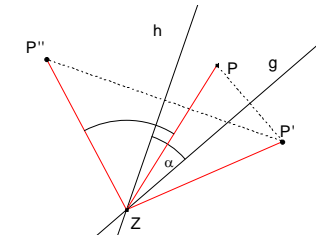
Da $\alpha = \beta' + \gamma = \beta + \gamma$ und

$\angle PZP'' = \beta + \beta' + \gamma + \gamma'$ folgt

$\angle PZP'' = \beta + \beta + \gamma + \gamma = 2(\beta + \gamma) = 2\alpha$.

Weitere Unterfälle:

Andere Lagen von P, P', P'' wie z.B. in der nebenstehenden Abbildung. → Übungsaufgabe



Da der Winkel α nur von der gegenseitigen Lage der Achsen g und h abhängt (nicht aber von der Lage des Punktes P), folgt, dass die Drehung immer um den gleichen Winkel 2α erfolgt.

3. Fall: Die beiden Spiegelachsen g und h sind parallel und verschieden und haben den Abstand a.

Sei P ein beliebiger Punkt, $P' = S_g(P)$ und $P'' = S_h(P')$. Wir untersuchen, wie sich P'' aus P ergibt.

Behauptung: P'' geht aus P durch Verschiebung um 2a in der Richtung senkrecht von g nach h hervor.

Wir müssen alle möglichen Lagen von P, P' und P'' bezüglich der Achsen g und h betrachten.

1. Unterfall:

P liegt so, dass P' und P'' wie in der nebenstehenden Abbildung liegen.

1. Behauptung: P, P' und P'' liegen auf einer Senkrechten zu den Achsen g und h.

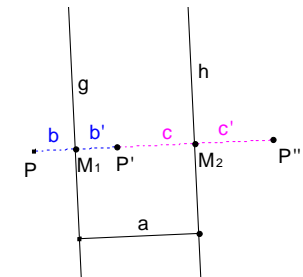
Klar nach Definition der Achsenspiegelung.

2. Behauptung: $\overline{PP''} = 2a$.

Nach Definition der Achsenspiegelung ist $b = \overline{PM_1} = \overline{M_1P'} = b'$

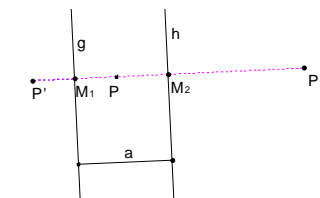
und $c = \overline{P'M_2} = \overline{M_2P''} = c'$. Da $a = b' + c$ ist, folgt

$$\overline{PP''} = 2b + 2c = 2a$$

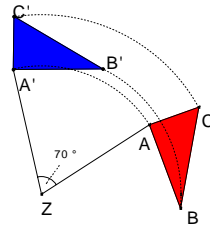
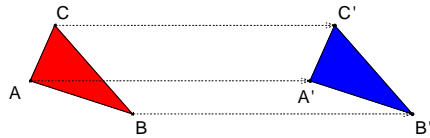


Weitere Unterfälle:

Andere Lagen von P, P', P'' wie z.B. in der nebenstehenden Abbildung. → Übungsaufgabe



Auch die Umkehrung von Satz 2.7 gilt!
 Jede **Drehung** $D_{Z,\alpha}$ lässt sich durch eine **Doppelspiegelung** ersetzen. Dabei müssen sich die beiden Spiegelachsen in Z unter $\angle \frac{1}{2} \alpha$ schneiden.
 Jede **Verschiebung** v lässt sich durch eine **Doppelspiegelung** an parallelen Achsen im Abstand $\frac{1}{2} \vec{v}$, senkrecht zu v , ersetzen.
 Orientierung des Winkels bzw. Verschiebungsrichtung beachten!



Konstruieren Sie für die gezeigten Abbildungen jeweils solche Achsen. Welche Bedingungen müssen dafür gelten?

Aufgabe

Konstruieren Sie Achsen für zwei Geradenspiegelungen, deren Verkettung eine Drehung um 90° (180° , 45°) ergibt. Überprüfen Sie durch Ausführen der Spiegelungen eines Dreiecks, dass sich tatsächlich jeweils die erwartete Drehung ergibt.

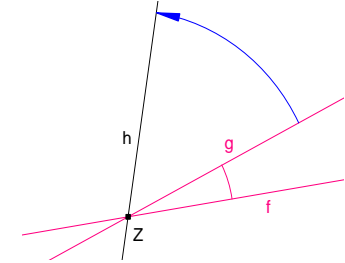
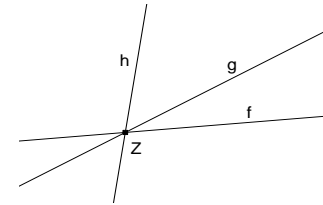
Aufgabe

Der Winkel $\angle f,g$ zwischen f und g sei 30° , der Winkel $\angle g,h$ sei 70° . Die Doppelspiegelung $S_f \circ S_g$ soll durch zwei andere Achsen dargestellt werden, deren eine h ist. Konstruieren Sie die zweite Achse.

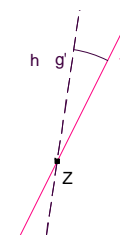
2.4 Hintereinanderausführen von 3 Achsenspiegelungen

Nachdem wir die Verkettung von zwei Achsenspiegelungen vollständig geklärt haben, wollen wir nun die Verkettung von drei Achsenspiegelungen untersuchen. Die Zahl der zu untersuchenden Fälle von gegenseitiger Lage der Achsen zueinander ist hier natürlich viel größer als zuvor.

1. Fall: Die Achsen schneiden sich in einem Punkt.



Die Drehung des Achsenpaares (f,g) um Z ändert die Verkettung $S_f \circ S_g$ nicht, wenn der eingeschlossene Winkel gleich bleibt.

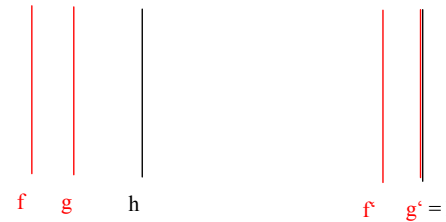


$$\begin{aligned} S_f \circ S_g \circ S_h &= (S_f \circ S_g) \circ S_h = \\ (S_f \circ S_g) \circ S_h &= S_f \circ (S_g \circ S_h) = \\ S_f \circ \text{id} &= S_f \end{aligned}$$

\Rightarrow **eine Achsenspiegelung an f'**

Beachten Sie, dass die Reihenfolge der Achsenspiegelungen eine Rolle spielt (kein Kommutativgesetz), die paarweise Zusammenfassung aber nicht (Assoziativgesetz).

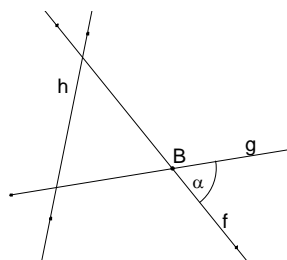
2. Fall: Die 3 Achsen sind parallel.



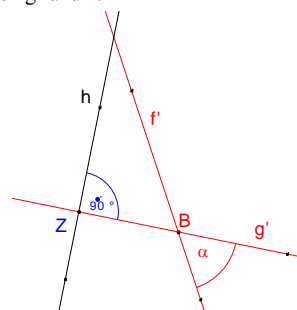
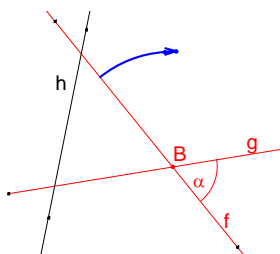
Die Verschiebung des Achsenpaares (f,g) ändert die Verkettung $S_f \circ S_g$ nicht.

$$S_f \circ S_g \circ S_h = (S_f \circ S_g) \circ S_h = (S_f \circ S_g) \circ S_h = S_f \circ (S_g \circ S_h) = S_f \circ \text{Id} = S_f \Rightarrow \text{eine Achsenspiegelung } S_f \text{ an } f'$$

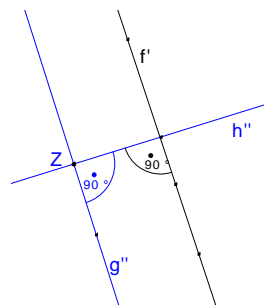
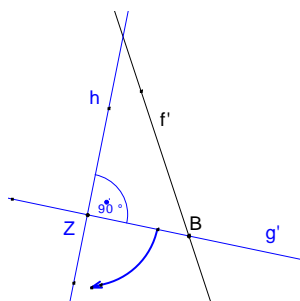
3.Fall: Die Achsen bilden ein Dreieck.



1. Drehung von (f,g) um B so, dass $g' \perp h$, Z Schnittpunkt von g' und h.



2. Drehung von (g',h) um Z so, dass $h'' \perp f'$



$$S_f \circ S_g \circ S_h = (S_f \circ S_g) \circ S_h = (S_{f'} \circ S_{g'}) \circ S_h = S_{f'} \circ (S_{g'} \circ S_h) = S_{f'} \circ (S_{g''} \circ S_{h''}) = (S_{f'} \circ S_{g''}) \circ S_{h''}$$

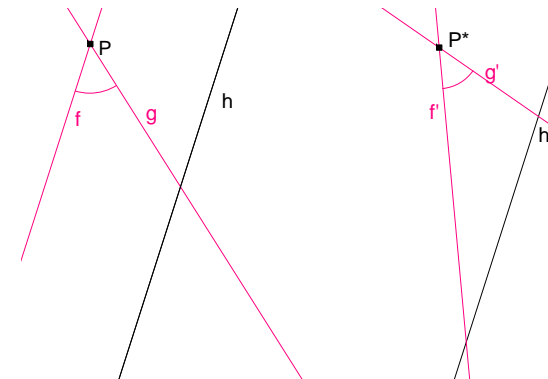
$(S_{f'} \circ S_{g''})$ ist Verschiebung parallel zur Spiegelachse h'' , danach wird eine Spiegelung an h'' durchgeführt

\Rightarrow Verschiebung gefolgt von einer Achsenspiegelung.
Solche Kongruenzabbildungen wollen wir als „Schubspiegelung“ bezeichnen.

Beachten Sie bei diesem Verfahren, dass man nur solche Achsenpaare um ihren Schnittpunkt drehen darf, die zu Spiegelungen gehören, die unmittelbar hintereinander ausgeführt werden; also hier nur (f,g) oder (g,h)

4.Fall: 2 Achsen sind parallel.

1. Unterfall: $f \parallel h$.



Drehen von Achsenpaar (f,g) um ihren Schnittpunkt $P \Rightarrow$ Lage wie im 3.Fall
 \Rightarrow **Schubspiegelung**

2. Unterfall: $f \parallel g \rightarrow$ Übung

Damit haben wir bewiesen:

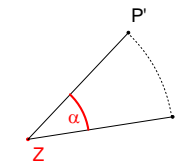
Satz 2.8:
Die Hintereinanderausführung von 3 Achsenspiegelungen ist eine Achsenspiegelung oder eine Schubspiegelung.

2.5 Drehungen

Die bislang als Verkettung von Achsenspiegelungen gewonnenen Kongruenzabbildungen Drehung, Verschiebung und Schubspiegelung sollen jetzt jeweils noch auf andere Art definiert werden.

Definition 2.3
Es sei Z ein Punkt der Ebene E , α eine Winkelgröße.

Eine Abbildung $D_{Z,\alpha} : E \rightarrow E$ heißt Drehung
 \Leftrightarrow für jeden Punkt P und seinen Bildpunkt P' gilt:
 $\overline{P'Z} = \overline{PZ}$
 $\angle PZP' = \alpha$
Ist $P = Z$, so ist $P' = Z = P$.



Eigenschaften einer Drehung $D_{Z,\alpha}$:

$D_{Z,\alpha}^{-1} = D_{Z,-\alpha} = D_{Z,360^\circ-\alpha}$
2 verschiedene Punktepaare (P,P') , (Q,Q') legen die Abbildung eindeutig fest (falls existent).

Fixelemente von $D_{Z,\alpha}$ (für $\alpha \neq 0^\circ$):

- Fixpunkte: Z .
- Fixpunktgeraden: keine.
- Fixgeraden: keine (für $\alpha \neq 0^\circ, \alpha \neq 180^\circ$).

Invarianten:

- geradentreu,
- längentreu,
- winkelmaßtreu,
- flächeninhaltenreu,
- umlaufsinntreu.

Weitere, hieraus und aus der Definition beweisbare Eigenschaften:

- Ist $Z \in g$, so ist $Z \in g'$,
- Gerade und Bildgerade haben von Z denselben Abstand,
- Gerade und Bildgerade schneiden sich unter α (Begründung?).

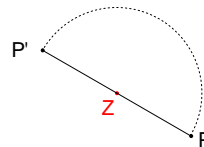
Punktspiegelung (Sonderfall der Drehung; Drehwinkel $\alpha = 180^\circ$)

Definition 2.4

Sei Z ein Punkt der Ebene E .

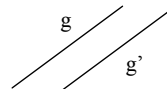
Eine Abbildung heißt **Punktspiegelung an Z**

- \Leftrightarrow für jeden Punkt P und seinen Bildpunkt P' gilt:
- Ist $P = Z$, so ist $P' = Z = P$,
- sonst halbiert Z die Strecke $\overline{PP'}$.



Zusätzliche Eigenschaften einer Punktspiegelung (gegenüber den Eigenschaften einer beliebigen Drehung):

- $D_{Z,180}^{-1} = D_{Z,180}$,
- $D_{Z,180}$ liegt durch **ein** Punktepaar (P,P') eindeutig fest (falls $P \neq P'$),
- alle Geraden durch Z sind Fixgeraden,
- $g' \parallel g$ (Originalgerade und Bildgerade sind parallel). Begründungen?



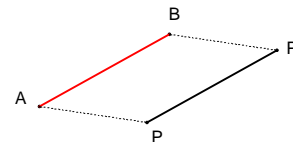
2.6 Verschiebungen

Definition 2.5

Es seien A, B zwei verschiedene Punkte der Ebene E .

Eine Abbildung $V_{A,B} : E \rightarrow E$ heißt **Verschiebung um \overline{AB}**

- \Leftrightarrow für alle Punkte P der Ebene gilt:
- liegt P auf der Geraden AB , so auch P' ;
- und $\overline{PP'}$ und \overline{AB} sind gleichlang und gleichgerichtet.
- Sonst bilden die Punkte $ABP'P$ (in dieser Reihenfolge) ein Parallelogramm.

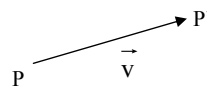


Eigenschaften:

$V_{A,B}^{-1} = V_{B,A}$

Eine Verschiebung liegt durch 1 Punktepaar (P,P') eindeutig fest.

Wir veranschaulichen die durch das Punktepaar (P,P') festgelegte Verschiebung oft durch einen Pfeil $\overline{PP'}$ von P nach P' und schreiben auch $V_{\vec{v}}$.



Fixelemente von $V_{A,B}$: (für $A \neq B$)

- keine Fixpunkte,
- alle Geraden parallel zu AB sind Fixgeraden.

Invarianten:

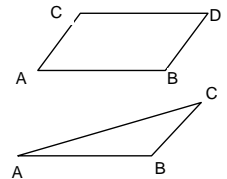
- geradentreu
- winkelmaßtreu
- längentreu
- flächeninhaltenreu
- Umlaufsinn bleibt erhalten

Zusätzliche Eigenschaft:

$g' \parallel g$ (d.h. Originalgerade und Bildgerade sind parallel). Begründung?

Aufgabe

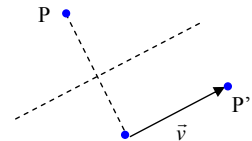
- (a) $ABDC$ sei ein Parallelogramm. Zeigen Sie mit Hilfe der Definition 2.5, dass gilt $V_{A,B} = V_{C,D}$.
- (b) Zeigen Sie mit Hilfe der Definition 2.5, dass für die Verkettung von zwei Verschiebungen gilt $V_{A,B} \circ V_{B,C} = V_{A,C}$.



2.7 Schubspiegelungen (Gleitspiegelungen)

Definition 2.6

Schubspiegelungen sind Abbildungen, die aus dem Hintereinanderausführen einer Verschiebung und einer Achsenspiegelung bestehen. Dabei liegt die Spiegelachse parallel zur Verschiebungsrichtung.



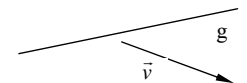
- Schubspiegelungen kann man durch die Verkettung von Spiegelungen an 3 Achsen darstellen, von denen die ersten beiden parallel zueinander sind und die dritte senkrecht dazu ist.
- Man kann die Reihenfolge von Verschiebung und Achsenspiegelung vertauschen, wenn die Verschiebung parallel zur Spiegelachse verläuft: $V_{\vec{v}} \circ S_g = S_g \circ V_{\vec{v}}$.

Aufgabe

Beweisen Sie, dass die Verkettung einer Achsenspiegelung mit einer Verschiebung immer eine Schubspiegelung ist (auch wenn die Verschiebung nicht parallel zur Spiegelachse verläuft) und führen Sie die Konstruktion der Spiegelachse und des Verschiebungsvektors für einige Beispiele durch.

Beachten Sie: In diesem Fall kann man die Achsenspiegelung und die Verschiebung nicht vertauschen. Wir vereinbaren hier: Zuerst die Achsenspiegelung S_g , dann die Verschiebung. Aufgabe

Was ist die zur Schubspiegelung $V_{\vec{v}} \circ S_g$ inverse Abbildung?



2.8 Kongruenzabbildungen - Produkte von Achsenspiegelungen

Mit der bisherigen Vorarbeit sind wir in der Lage, die angestrebte Klassifizierung aller Kongruenzabbildungen vorzunehmen.

Wir geben nochmals eine kurze Zusammenfassung des bisherigen Vorgehens:

- Zunächst werden Kongruenzabbildungen als bijektive, geradentreue, längentreue Abbildungen der Ebene definiert.
- Achsenspiegelungen erweisen sich als Kongruenzabbildungen.
- Verkettung von Achsenspiegelungen sind Kongruenzabbildungen.
- Jede Kongruenzabbildung ist durch die Abbildung eines Dreiecks eindeutig festgelegt.
- Wir wissen, welche Abbildungstypen sich durch die Verkettung von höchstens 3 Achsenspiegelungen ergeben:
 Achsenspiegelung bei 1 Achse (gegensinnige Abbildung),
 Drehung oder Verschiebungen bei 2 Achsen (gleichsinnige Abbildung),
 Schubspiegelung oder Achsenspiegelung bei 3 Achsen (gegensinnige Abbildung).

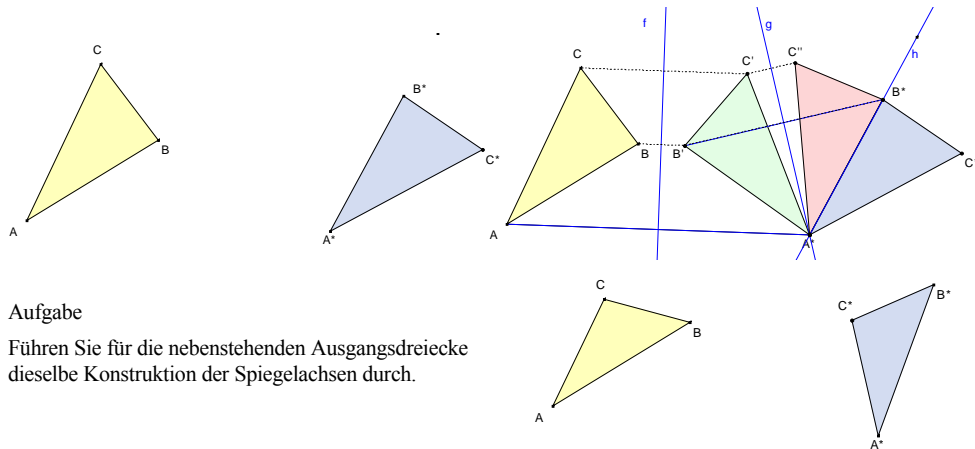
Wir wollen nun zeigen, dass sich auch jede Kongruenzabbildung durch höchstens 3 Achsenspiegelungen darstellen lässt. Dazu beweisen wir zunächst den folgenden Satz.

Satz 2.9
Gegeben seien zwei Dreiecke ABC und A*B*C* mit gleich langen Seiten.
Dann lässt sich Dreieck ABC auf Dreieck A*B*C* durch eine Verkettung von höchstens 3 Achsenspiegelungen abbilden.

Beweis:
 Gegeben sei ein Dreieck ABC und ein dazu kongruentes Dreieck A*B*C*.
 Anzugeben ist ein Produkt von 1, 2 oder 3 Achsenspiegelungen, welches ABC auf A*B*C* abbildet.
 Idee: Angabe von Achsenspiegelungen (oder von identischen Abb.) mit den Eigenschaften

- f: $A \mapsto A^*$, $(B \mapsto B^*, C \mapsto C^*)$
 g: $B^* \mapsto B^*$; A^* bleibt fest, $(C^* \mapsto C^{**})$ warum gibt es eine solche Spiegelung?
 h: $C^{**} \mapsto C^*$; A^* und B^* bleiben fest. warum gibt es eine solche Spiegelung?

Ausgangsdreiecke \Rightarrow Konstruktion der Achsenspiegelungen



Aufgabe
 Führen Sie für die nebenstehenden Ausgangsdreiecke dieselbe Konstruktion der Spiegelachsen durch.

Satz 2.10
Jede Kongruenzabbildung lässt sich als Einfach-, Zweifach- oder Dreifachspiegelung darstellen.

Beweis
 Zu einer gegebenen Kongruenzabbildung f wählt man ein beliebiges Dreieck ABC aus. f bildet ABC auf das Dreieck A*B*C* mit gleichen Seitenlängen wie ABC ab. Nach Satz 2.9 kann man das Dreieck ABC durch eine Verkettung g von ≤ 3 Achsenspiegelungen auf A*B*C* abbilden. Da diese Verkettung g eine Kongruenzabbildung ist und wegen Satz 2.6 Kongruenzabbildungen durch das Bild eines Dreiecks eindeutig bestimmt sind folgt, dass f gleich g ist, also durch ≤ 3 Achsenspiegelungen dargestellt werden kann.

Satz 2.11
Die Verkettung von beliebig vielen Achsenspiegelungen lässt sich auf eine Verkettung von ≤ 3 Achsenspiegelungen reduzieren. (Dreispiegelungssatz)

Beweis
 Einfache Folgerung aus Satz 2.10.

Satz 2.12
Jede Kongruenzabbildung ist von einem der Typen

- **Achsenspiegelung,**
- **Drehung,**
- **Verschiebung,**
- **Schubspiegelung.**

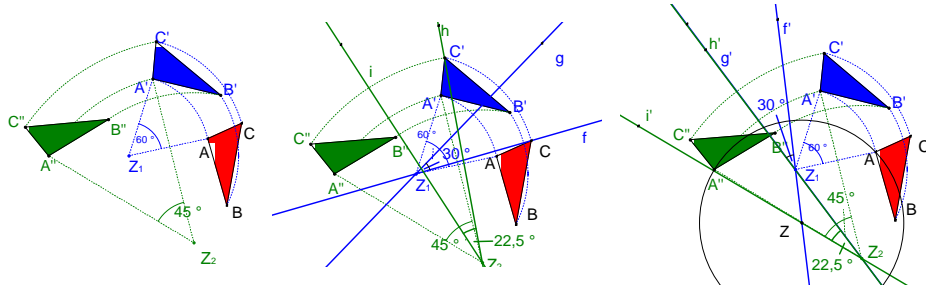
Beweis
 Einfache Folgerung aus Satz 2.10. und der Analyse der Verkettung von ≤ 3 Achsenspiegelungen.

2.9 Hintereinanderausführen von 4 und mehr Geradenspiegelungen

Im vorangehenden Abschnitt haben wir allgemein gezeigt, dass sich Verkettungen von beliebig vielen Achsenspiegelungen auf die Verkettung von ≤ 3 Achsenspiegelungen zurückführen lassen. Wir haben bei diesem Nachweis nicht gezeigt, wie sich diese Achsenspiegelungen aus den gegebenen Achsenspiegelungen ergeben. Die soll nun an zwei Beispielen konkret gezeigt werden. Wir untersuchen exemplarisch die Verkettung von 2 Drehungen und die Verkettung von zwei Verschiebungen. Wir verwenden wieder die zuvor schon mehrfach angewandte Methode der „Elimination von Spiegelachsen“. Die Übertragung dieser Methode auf weitere Fälle (etwa die Verkettung einer Drehung und einer Verschiebung) möge als Übungsaufgabe dienen.

Verkettung von zwei Drehungen

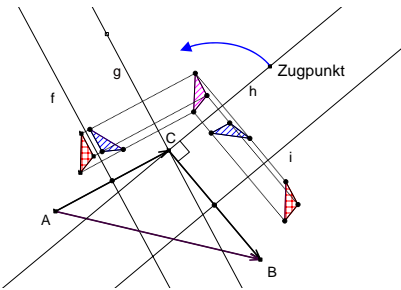
Gegeben seien zwei Drehungen um verschiedene Drehzentren Z_1 und Z_2 mit den Drehwinkeln α_1 und α_2 . Die Verkettung der Drehungen kann durch 4 Achsenspiegelungen $(S_f \circ S_g) \circ (S_h \circ S_i)$ dargestellt werden. Hier wird die Abbildung eines Dreiecks ABC gezeigt, was nur zur besseren Veranschaulichung dient, die Angabe der Achsen alleine genügt natürlich. Die Achsenpaare (f,g) und (h,i) können wieder um ihren jeweiligen Schnittpunkt unter Beibehaltung des eingeschlossenen Winkels gedreht werden, so dass $g^* = h^*$ wird; es ist dann $g^* = \overline{Z_1 Z_2}$. Natürlich hätten wir schon zu Beginn gleich g und h so wählen können, dass sie zusammenfallen und gleich $\overline{Z_1 Z_2}$ sind.



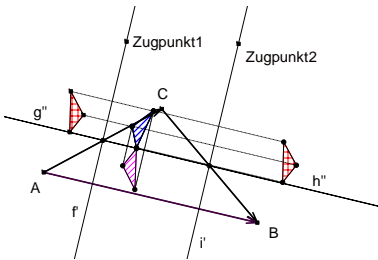
Es ist $(S_f \circ S_g) \circ (S_h \circ S_i) = (S_f \circ S_g) \circ (S_h \circ S_i) = S_f \circ (S_g \circ S_h) \circ S_i = S_f \circ \text{id} \circ S_i = S_f \circ S_i$.
 Schneiden sich f' und i' im Punkt Z , dann ergibt sich eine Drehung um Z um $\alpha_1 + \alpha_2$ (Bild), sind f' und i' parallel, dann ergibt sich eine Verschiebung. (Für welche Winkel α_1 und α_2 tritt dieser zweite Fall ein?)
 Selbstverständlich konnten wir schon im Voraus sagen, dass nur diese beiden Fälle eintreten konnten (warum?), der hier gegebene Nachweis gibt aber eine unmittelbare Konstruktion des Drehzentrums Z aus den Achsen der Einzeldrehungen an.

Verkettung von zwei Verschiebungen

Gegeben seien zwei Verschiebungen in verschiedene Richtungen (gleiche Richtungen: trivial), die durch $S_f \circ S_g$ und $S_h \circ S_i$ dargestellt sind. Wir zeigen, dass die Verkettung wieder eine Verschiebung ist. Wir erhalten die bekannte „Vektoraddition“ für die Verschiebungen.



Drehung von (g,h) um C , so dass g' auf AC fällt



Drehung von (f,g') um den Mittelpunkt von \overline{AC} und von (h',i) um den Mittelpunkt von \overline{BC} so dass g'' und h'' zusammen fallen.
 Formaler zusammengefasst:

$$(S_f \circ S_g) \circ (S_h \circ S_i) = S_f \circ (S_g \circ S_h) \circ S_i = S_f \circ (S_g \circ S_h) \circ S_i = (S_f \circ S_g) \circ (S_h \circ S_i) = S_f \circ (S_g \circ S_h) \circ S_i = S_f \circ \text{id} \circ S_i = S_f \circ S_i$$

f' und i' sind parallel und ihr Abstand ist die Hälfte der Länge der Seite \overline{AB} .

Wir halten diese Ergebnisse nochmals fest.

Satz 2.13

- Die Verkettung von zwei Drehungen ist eine Verschiebung, wenn für die Drehwinkel α_1 und α_2 gilt $\alpha_1 + \alpha_2 = 360^\circ$, andernfalls eine Drehung um den Winkel $\alpha_1 + \alpha_2$.
- Die Verkettung von zwei Verschiebungen ist eine Verschiebung nach den Gesetzen der Vektoraddition.

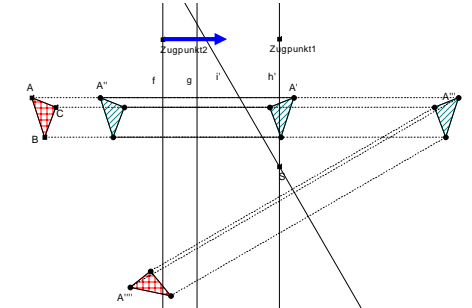
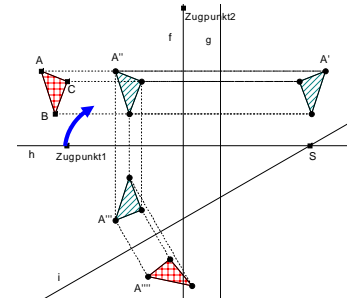
Zum Schluss wird noch ein Überblick darüber gegeben, was bei der Verkettung von 4 Achsenspiegelungen geschehen kann.

Gegeben seien die Achsenspiegelungen $S_f \circ S_g \circ S_h \circ S_i = (S_f \circ S_g \circ S_h) \circ S_i$. Folgende Fälle sind möglich:

- $(S_f \circ S_g \circ S_h)$ ist Spiegelung: Spiegelung \circ Spiegelung \Rightarrow Drehung oder Verschiebung
- $(S_f \circ S_g \circ S_h)$ ist Schubspiegelung: Schubspiegelung \circ Spiegelung \Rightarrow Drehung oder Verschiebung

Zu 2.: Man stellt die Schubspiegelung durch 3 Achsenspiegelungen dar und kann annehmen: $f \parallel g$ und $h \perp g$.

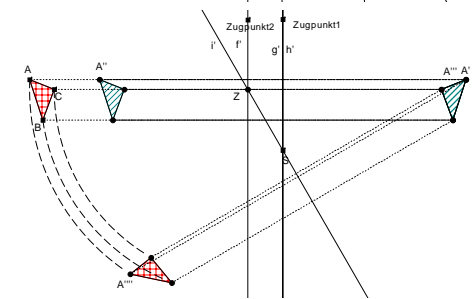
- Fall: $i \parallel h$: $S_f \circ S_g$ und $S_h \circ S_i$ sind Verschiebungen. \Rightarrow Verschiebung
- Fall: Nicht $i \parallel h$. Dann kann man die Achsen h und i um ihren Schnittpunkt S drehen, so dass $h' \parallel g'$ wird, und dann das Paar f, g so verschieben, dass g' mit h' zusammenfällt. \Rightarrow Drehung um $f' \cap i'$.



Formaler zusammengefasst:

$$(S_f \circ S_g) \circ (S_h \circ S_i) = (S_f \circ S_g) \circ (S_h \circ S_i) = (S_f \circ S_g) \circ (S_h \circ S_i) = S_f \circ (S_g \circ S_h) \circ S_i = S_f \circ \text{id} \circ S_i = S_f \circ S_i$$

f' und i' schneiden sich in einem Punkt Z .



Satz 2.14

- Die Verkettung von 4 Achsenspiegelungen ist eine Drehung oder eine Verschiebung.
- Die Verkettung von 4 Achsenspiegelungen lässt sich stets ersetzen durch die Verkettung von 2 (geeigneten) Achsenspiegelungen

Hintereinanderausführen von mehr als 4 Achsenspiegelungen:

Mit Satz 2.14 und dessen Beweis lässt sich nochmals ein Beweis für den Dreispiegelungssatz (Satz 2.11) geben, der zeigt, wie die Reduktion der Anzahl der Achsenspiegelungen *schrittweise* vorgenommen werden kann:

Sei n die Anzahl der Achsenspiegelungen, $n > 4$.

$$S_1 \circ S_2 \circ S_3 \circ S_4 \circ \dots \circ S_n = (S_1 \circ S_2 \circ S_3 \circ S_4) \circ \dots \circ S_n = (S'_1 \circ S'_2) \circ \dots \circ S_n \quad (\text{wegen Satz 2.14})$$

\Rightarrow für $n \geq 4$ lässt sich die Anzahl der Achsenspiegelungen schrittweise um jeweils 2 reduzieren.

\Rightarrow stets Reduktion auf maximal 1, 2 oder 3 Achsenspiegelungen möglich.

3 Deckabbildungen von Figuren - Symmetrie

3.1 Die Gruppe (K, \circ) aller Kongruenzabbildungen einer Ebene

K ist die Menge aller Kongruenzabbildungen $E \rightarrow E$;

\circ ist die „Hintereinanderausführung“ von Abbildungen

- K ist abgeschlossen unter \circ ,
- das **Assoziativgesetz** gilt: $(f \circ g) \circ h = f \circ (g \circ h)$,
- „id“ ist **neutrales** Element; $\text{id} \in K$ (id ist die identische Abbildung)
- mit jedem $f \in K$ ist auch das **inverse** Element $f^{-1} \in K$

Damit gilt:

Satz 3.1

(K, \circ) ist eine (unendliche) Gruppe

Definition 3.1

Sei h eine Kongruenzabbildung der Ebene E und $F \subseteq E$ eine Figur in der Ebene.

Wenn $h(F)=F$ ist, d.h. wenn F invariant unter h ist, dann nennt man F **h-symmetrisch**, und h eine **Deckabbildung** (Symmetrieabbildung) von F .

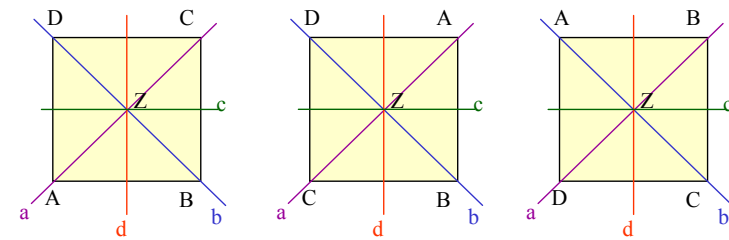
Satz 3.2

Sei $F \subseteq E$ eine (nicht notwendig beschränkte) Figur in der Ebene. Dann ist die Menge der Deckabbildungen (Symmetrieabbildungen) von F eine Untergruppe von (K, \circ) .

Beweis: Übung!

3.2 Die Deckabbildungen eines Quadrats

Die Spiegelachsen sind raumfest!



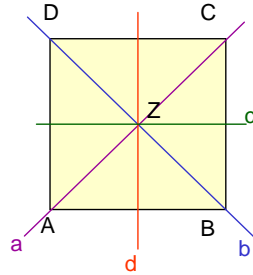
$$ABCD \xRightarrow{S_b} CBAD \xRightarrow{D_{Z,90}} DCBA$$

$$S_b \circ D_{Z,90} = S_c$$

Schreibweise hier ab jetzt: „90“ statt $D_{Z,90}$ und „a“ statt S_a

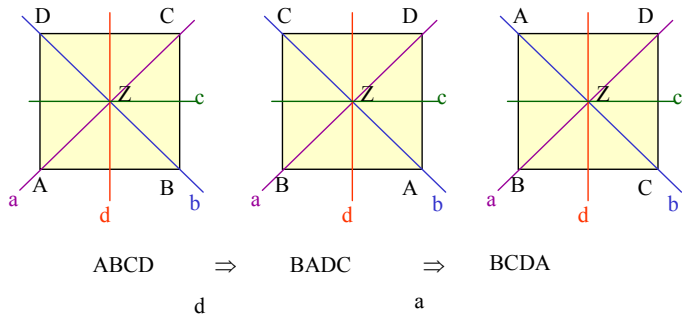
Wir stellen eine Tabelle mit den Verknüpfungen der Deckabbildungen des Quadrats auf:

o	0	90	180	270	a	b	c	d
0	0	90	180	270	a	b	c	d
90	90	180	270	0	c	d	b	a
180	180	270	0	90	b	a	d	c
270	270	0	90	180	d	c	a	b
a	a	d	b	c	0	180	270	90
b	b	c	a	d	180	0	90	270
c	c	a	d	b	90	270	0	180
d	d	b	c	a	270	90	180	0



Satz 3.3
Die Menge der Deckabbildungen eines Quadrats bildet eine Gruppe
(mit der Hintereinanderausführung als Verknüpfung).

Aufstellen bzw. überprüfen der Verknüpfungstabelle: $d \circ a = 270$?



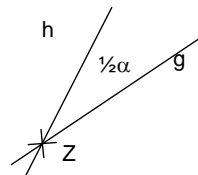
... oder einfach: $d \circ a$ ist eine Drehung um den doppelten Winkel zwischen d und a, $\angle d,a = 135^\circ$.

Man kann die Tabelle leichter überprüfen, wenn man folgende Tatsache über Verkettung von Achsenspiegelung und Drehung benutzt (Übung):

Ist g eine Gerade durch Z, $D_{Z,\alpha}$ eine Drehung um Z mit Winkel α , dann ist

$$S_g \circ D_{Z,\alpha} = S_h, \text{ wobei } Z \in h \text{ und } \angle g,h = \frac{1}{2}\alpha,$$

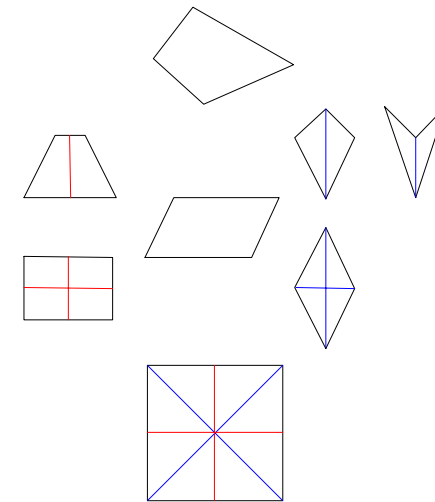
$$D_{Z,\alpha} \circ S_g = S_k, \text{ wobei } Z \in k \text{ und } \angle k,g = \frac{1}{2}\alpha.$$



3.3 Untergruppen der Deckabbildungsgruppe des Quadrats

- a) $\{D_0, D_{90}, D_{180}, D_{270}, S_a, S_b, S_c, S_d\}$ Deckabbildungen des Quadrats
- b) $\{D_0, D_{90}, D_{180}, D_{270}\}$ Deckdrehungen des Quadrats
- c) $\{D_0, D_{180}, S_a, S_b\}$ Deckabbildungen der Raute
- d) $\{D_0, D_{180}, S_c, S_d\}$ Deckabbildungen des Rechtecks
- e) $\{D_0, D_{180}\}$ Deckabbildungen des Parallelogramms
- f) $\{D_0, S_a\}$ Deckabbildungen des Drachens
- g) $\{D_0, S_c\}$ Deckabbildungen des (symmetrischen.) Trapezes
- h) $\{D_0\}$ Deckabbildungen eines beliebigen Vierecks

Das „Haus der Vierecke“
Symmetrie als Ordnungsprinzip



Bemerkung: Will man das **allgemeine Trapez** und den **schiefen Drachen** in das „Haus“ aufnehmen, dann muss man zusätzlich Schrägspiegelsymmetrie berücksichtigen.

3.4 Symmetrieachsen - Deckdrehungen einer (beschränkten) Figur

Satz 3.4
Alle Figuren seien beschränkt.

a) Für jedes $n \in \mathbb{N}$ gilt: Es gibt eine Figur mit genau n Symmetrieachsen.

Lage dieser Symmetrieachsen:

Alle schneiden sich in einem Punkt Z,

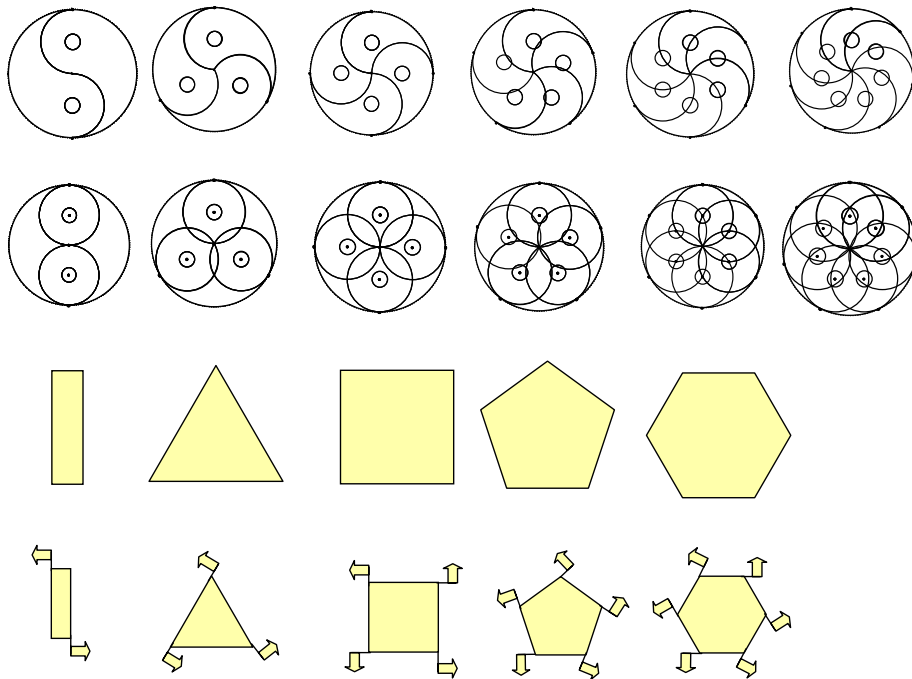
Schnittwinkel zwischen 2 benachbarten Achsen: $360^\circ / (2n)$.

b) Hat eine Figur genau n Symmetrieachsen, so ist jede Drehung um Z um $360^\circ/n$ eine Deckdrehung der Figur. Es gibt keine Deckdrehung der Figur mit kleinerem Drehwinkel.

\Rightarrow Jede achsensymmetrische Figur mit mindestens 2 Symmetrieachsen ist auch drehsymmetrisch

c) Nicht jede drehsymmetrische Figur ist auch achsensymmetrisch

Beispiele:



3.5 Kreis - Zweikreisfigur

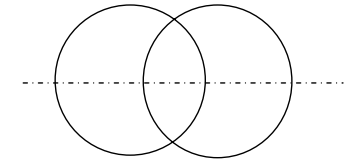
Kreis

Ein Kreis besitzt unendlich viele Symmetrieachsen (jede Gerade durch M ist Symmetrieachse) und unendlich viele Deckdrehungen (jede Drehung um M ist Deckdrehung),

Zweikreisfigur

Die Figur hat genau zwei Symmetrieachsen.

Die Eigenschaften dieser Figur ist Grundlage für viele Konstruktionen der Geometrie wie Mittelsenkrechte einer Strecke, Winkelhalbierende, Konstruktion einer Raute etc.



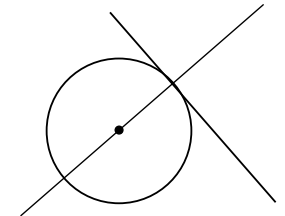
Kreisfigur mit Tangente

Die Figur hat eine Symmetrieachse: den Radius durch den Berührungspunkt.

Folgerung:

Die Tangente steht senkrecht auf dem Berührungsradius.

Dies ist Grundlage für viele Konstruktionen der Geometrie wie Tangente an einen Kreis von einem Punkt außerhalb des Kreises, gemeinsame Tangenten an zwei Kreise.



3.6 Aufgaben zur Symmetrie

Aufgabe

S_g sei eine Achsenspiegelung an g , $F_0 \subseteq E$ eine beliebige Figur, $F_1 = S_g(F_0)$.

Zeigen Sie, dass $F = F_0 \cup F_1$ die kleinste Figur ist, die F_0 enthält und S_g -symmetrisch ist.

Welche einfache geometrische Tätigkeit aus der Grundschule wird hiermit abstrakt und kompliziert beschrieben?

Aufgabe

(a) $D_{Z,120^\circ}$ sei eine Drehung um Z mit Drehwinkel 120° , $F_0 \subseteq E$ eine beliebige Figur, $F_1 = D_{Z,120^\circ}(F_0)$, $F_2 = D_{Z,120^\circ}(F_1)$. Zeigen Sie, dass $F = F_0 \cup F_1 \cup F_2$ die kleinste Figur ist, die F_0 enthält und $D_{Z,120^\circ}$ -symmetrisch ist.

Welche einfache geometrische Tätigkeit aus der Grundschule wird hiermit beschrieben?

(b) Nun sei statt $D_{Z,120^\circ}$ die Drehung $D_{Z,30^\circ}$ gegeben. Beschreiben Sie die Konstruktion der kleinsten Figur, die F_0 enthält und $D_{Z,30^\circ}$ -symmetrisch ist.

(c) Beantworten Sie Frage (b) jeweils für die Drehwinkel 50° , 17° .

Aufgabe

$V_{A,B}$ sei eine Verschiebung um den Vektor, $\vec{v} = \overline{AB}$ $F_0 \subseteq E$ eine beliebige Figur, $F_0 \neq \emptyset$.

Zeigen Sie, dass es keine beschränkte Figur gibt, die $V_{A,B}$ -symmetrisch ist.

Wie erhält man die „kleinste“ Figur, die F_0 enthält und $V_{A,B}$ -symmetrisch ist?

Welche einfache geometrische Tätigkeit aus der Grundschule wird hiermit beschrieben?

Aufgabe

Geben Sie eine nicht beschränkte Figur an, die Symmetrieachsen hat, die nicht durch einen Punkt gehen.

3.7 Parkettieren

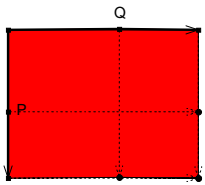
3.7.1 Was ist Parkettieren?

"Parkettieren ist das überlappungsfreie, lückenlose Ausfüllen der Ebene mit einem vorgegebenen endlichen Satz kongruenter Figuren "

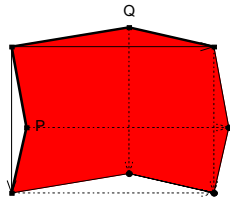
Womit kann man parkettieren?

- Mit welchen *regelmäßigen Vielecken* kann man parkettieren?
- Mit welchen Dreiecken kann man parkettieren?
- Mit welchen Vierecken kann man parkettieren?

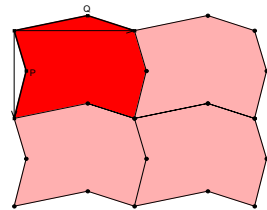
Schwierigere Fragestellung: Parkettierungen mit mehr als einem Typ von Figuren. Beispiele zur Gewinnung einer Parkettierung:



Ausgangsfigur:
Rechteck oder
Parallelogramm

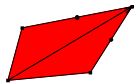


Ausgangsfigur an
gegenüberliegenden Seiten
kongruent verändern

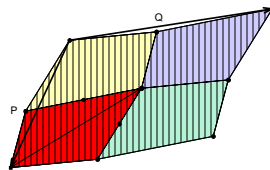


Mit dem entstehenden 8-Eck kann
man die Ebene wie mit der
Ausgangsfigur durch zwei
Wiederholung von 2 Verschiebungen
parkettieren.

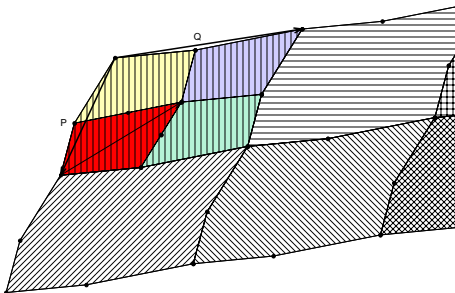
Ausgangsviereck



...8-Eck wie zuvor:



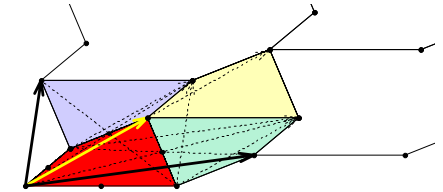
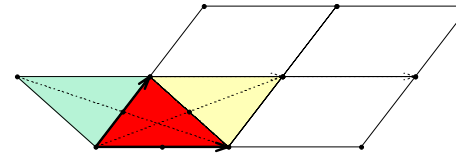
Parkettieren durch 2
Verschiebungen möglich.



Satz 3.5

- Mit **regelmäßigen n-Ecken** kann man **genau dann parkettieren**, wenn $n = 3, 4, 6$ ist.
- Man kann mit **jedem beliebigen Dreieck oder Viereck** parkettieren.

Beweis zu b):



Aus einem Dreieck erhält man durch Spiegelung an einer Seitenmitte ein Parallelogramm als Grundfigur, aus dem das gesamte Parkett alleine durch mehrfache Verschiebungen erzeugt werden kann.

Auch bei einem beliebigen (konvexen) Viereck kann man durch Spiegeln an einer Seitenmitte eine Grundfigur erhalten, aus der das gesamte Parkett alleine durch mehrfache Verschiebungen erzeugt werden kann. Im Beispiel oben wurde durch Spiegeln an einer Seitenmitte und zusätzliches Verschieben der beiden Vierecke eine Grundfigur erzeugt, mit der man ähnlich wie mit Parallelogrammen parkettieren kann.

3.7.2 Warum wird im Mathematikunterricht parkettiert?

Parkettieren mit Dreiecken und Vierecken ermöglicht in der Schule einen experimentellen Zugang zu den Sätzen über die Winkelsumme.

Als eine Forderung an die Inhalte der Schulmathematik wird häufig genannt

„Die Geometrie (der Grundschule) soll sich an fundamentalen geometrischen Ideen orientieren“.

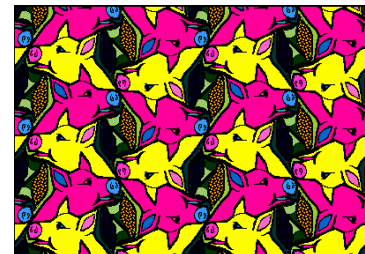
Realisierung **fundamentaler Ideen der Geometrie** beim Parkettieren:

- die **Idee des Messens** : Vorbereitung des Begriffs „Flächeninhalt“
- die **Idee des Passens** : Längen, Winkel, Winkelsätze, Winkelsummensätze
- Ästhetik** : Einfärben; ansprechende Grundbausteine (Symmetrien ausnützen)

3.7.3 Parkettieren durch geeignetes Verändern von Grundbausteinen

Z.B. mit dem Computer-Programm "Tesselmania" leicht auch mit Schülern durchführbar.

Hier zwei Beispiele:



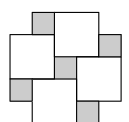
Das Programm findet man als Demo auf dem schwarzen Brett „Schwarzes Brett/Mathematik und Informatik/Geueb/“

3.7.4 Parkettieren mit mehr als einem Grundbaustein

Beispiele: Parkettieren mit zwei verschiedenen großen Quadraten.

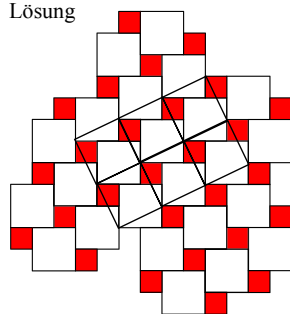
Aufgabe für Schülerinnen und Schüler:

Legt mit den verschiedenen Quadratplättchen eures Vorrats ein Muster, das so aussieht:



Macht das so lange weiter, bis ihr alle Quadrate aus dem Vorrat untergebracht habt. Zeichnet das fertige Muster auf.

Lösung

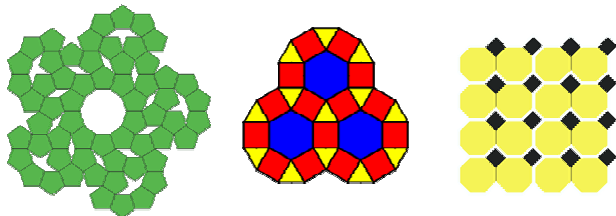


Über das Parkett ist ein Parkett aus einer Sorte von Quadraten gelegt, das häufig in Zusammenhang mit dem Satz des Pythagoras gebracht wird. Können Sie den Zusammenhang sehen?



Mit einer Sorte von nicht-regelmäßigen Figuren gibt es oft verschiedene Parkettierungen, wie das nebenstehende Bild aus einem Schulbuch zeigt.

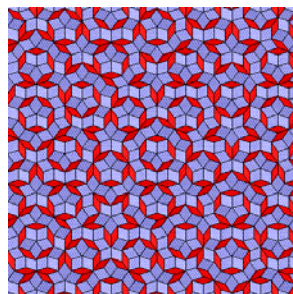
Weitere einfache Beispiele:



Aufgabe: Suchen Sie im Internet Beispiele für interessante Parkettierungsaufgaben (engl.: Tiling). Roger Penrose hat einfache Parkettierungen der Ebene entdeckt, die nicht-periodisch sind, d.h. keine Schubsymmetrie aufweisen.

Es gibt sogar endliche Mengen von Grundbausteinen, die **nur** nicht-periodische Parkettierungen zulassen.

Nebenstehend eine *nicht-periodische* Parkettierung mit zwei Grundbausteinen.

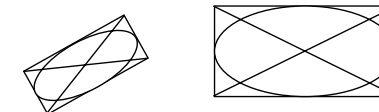


4 Ähnlichkeitsabbildungen

Beispiele „Verkleinerungen“,



„Vergrößerungen“



Bijektive, geradentreue Abbildungen, bei denen die Winkel erhalten werden, aber nicht notwendig auch die Längen.

4.1 Zentrische Streckungen

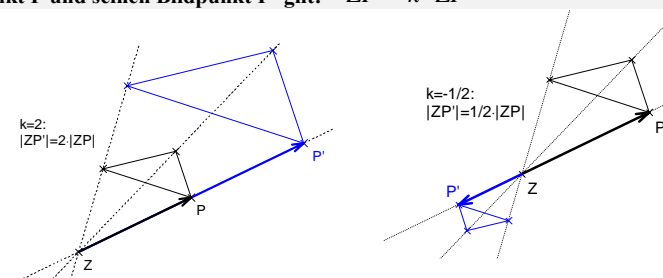
Definition 4.1

Es sei Z ein Punkt der Ebene E ; $k \in \mathbb{R} \setminus \{0\}$.

Eine Abbildung $E \rightarrow E$ heißt **zentrische Streckung** mit (Streck-)Zentrum Z und Streckfaktor k

\Leftrightarrow für jeden Punkt P und seinen Bildpunkt P' gilt: $\overrightarrow{ZP'} = k \cdot \overrightarrow{ZP}$

Beispiele:



Eigenschaften einer zentrischen Streckung:

- Umkehrabbildung ist die zentrische Streckung mit demselben Zentrum und dem Streckfaktor $1/k$. Insbesondere ist eine zentrische Streckung bijektiv.
- Fixelemente einer zentrischen Streckung:
 - Fixpunkt: Z
 - Fixgeraden: alle Geraden durch Z

Invarianten einer zentrischen Streckung:

- geradentreu
- Bildgerade \parallel Originalgerade
- parallelentreu
- winkelmäÙtreu
- umlaufsinntru
- teilverhältnistreu
- streckenverhältnistreu (erklären Sie den Unterschied zur Teilverhältnistreu)
- i.a. **nicht flächeninhaltenstreu**

Einige Beweise:

- Geradentreue: Lassen wir aus, weil sie unmittelbar einleuchtend erscheint, aber zum Beweis einigen Aufwand erfordert.

- Bildgerade \parallel Originalgerade:
Falls $Z \in g$ ist, dann ist $g' = g$ und damit $g' \parallel g$. Falls $Z \notin g$ aber $g' \cap g = \{P\}$ dann wäre P Fixpunkt $\neq Z$. Also ist auch in diesem Fall $g' \parallel g$.
- Parallelentreue, Winkelmaßtreue:
Folgen unmittelbar aus der vorangehenden Eigenschaft.
- Umlaufsinnstreue: Offensichtlich.
- Teilverhältnistreue: Beweis später, Satz 4.3.

Der folgende Satz formuliert, dass eine zentrische Streckung das leistet, was man sich unter einer Vergrößerung mit Faktor k vorstellt.

Satz 4.1

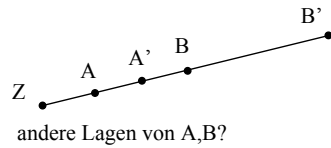
Bei einer zentrischen Streckung mit Faktor k gilt für jede Strecke \overline{AB} : $|\overline{A'B'}| = |k| \cdot |\overline{AB}|$

Beweis:

1. Fall:

A, B liegen auf einer Geraden g durch Z. Dann gilt

$$|\overline{A'B'}| = |\overline{ZB'}| - |\overline{ZA'}| = k|\overline{ZB}| - k|\overline{ZA}| = k(|\overline{ZB}| - |\overline{ZA}|) = k|\overline{AB}|$$



andere Lagen von A, B?

2. Fall:

A, B liegen nicht auf einer Geraden g durch Z (s. Abbildung).

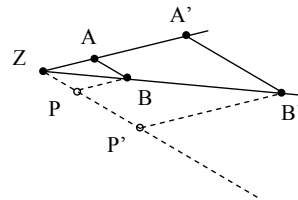
Ergänze Dreieck ZAA' zu Parallelogramm ZAA'P. Es ist $|\overline{ZP}| = |\overline{AA'}|$.

Strecke P mit Faktor k. Es ist $|\overline{ZP'}| = k|\overline{ZP}|$ und \overline{PB} geht in $\overline{P'B'}$

über. Daher ist $\overline{P'B'} \parallel \overline{PB} \parallel \overline{ZA'}$, $ZA'B'P'$ ist also ein Parallelogramm

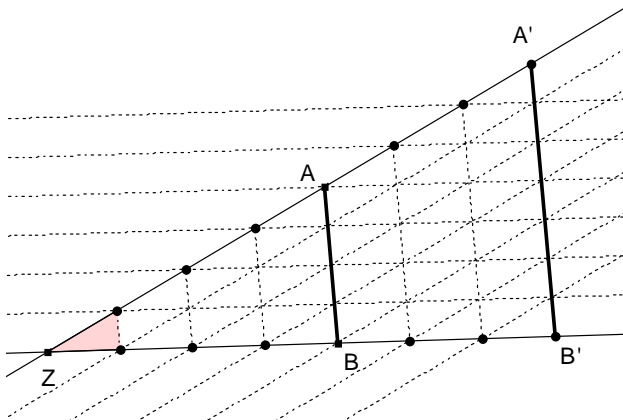
und $|\overline{A'B'}| = |\overline{ZP'}| = k|\overline{ZP}| = k|\overline{AA'}|$.

Negative Werte von k: Übung.

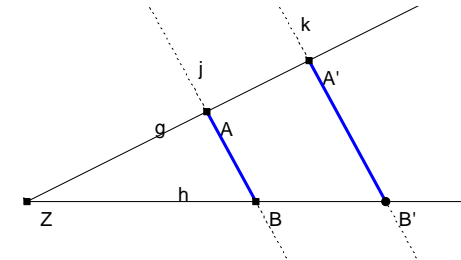


Hier ein anderer Beweis, zunächst aber nur für rationale k. Man müsste für den allgemeinen Fall eine Grenzwertbetrachtung anschließen.

Hier ist $k = \frac{7}{4}$



4.2 Die Strahlensätze



Satz 4.2

Voraussetzung: Gegeben sind 4 Geraden g, h, j, k mit folgenden Eigenschaften (vgl. Figur):

$$g \cap h = \{Z\}$$

$$g \cap j = \{A\}; \quad g \cap k = \{B\}; \quad h \cap j = \{A'\}, \quad h \cap k = \{B'\}$$

Dann gilt:

1. Strahlensatz:

Ist $j \parallel k$, so ist $\frac{|\overline{ZA'}|}{|\overline{ZA}|} = \frac{|\overline{ZB'}|}{|\overline{ZB}|}$ und $\frac{|\overline{ZA}|}{|\overline{AA'}|} = \frac{|\overline{ZB}|}{|\overline{BB'}|}$.

Umkehrung des 1. Strahlensatzes:

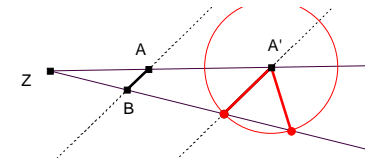
Ist $\frac{|\overline{ZA'}|}{|\overline{ZA}|} = \frac{|\overline{ZB'}|}{|\overline{ZB}|}$ oder $\frac{|\overline{ZA}|}{|\overline{AA'}|} = \frac{|\overline{ZB}|}{|\overline{BB'}|}$, so ist $j \parallel k$.

(dient häufig zum Nachweis der Parallelität von Geraden!)

2. Strahlensatz:

Ist $j \parallel k$, so ist $\frac{|\overline{ZA'}|}{|\overline{ZA}|} = \frac{|\overline{A'B'}|}{|\overline{AB}|}$

Der 2. Strahlensatz ist nicht umkehrbar!



Beweis des 1. Strahlensatzes

Durch $k = \frac{|\overline{ZA'}|}{|\overline{ZA}|}$ wird eine zentrische Streckung definiert.

Das Bild von B unter dieser Streckung sei B^{\sim} . Dann ist $A'B^{\sim} \parallel AB$. Aus $AB \parallel A'B'$ folgt $A'B^{\sim} \parallel A'B'$,

also $B^{\sim} = B'$ und damit auch $k = \frac{|\overline{ZB'}|}{|\overline{ZB}|}$

Beweis der Umkehrung des 1. Strahlensatzes

Es sei $\frac{|\overline{ZA'}|}{|\overline{ZA}|} = \frac{|\overline{ZB'}|}{|\overline{ZB}|} = k$.

\Rightarrow A und B werden durch zentrische Streckung mit Faktor k auf A' und B' abgebildet. $\Rightarrow AB \parallel A'B'$.

Beweis des 2. Strahlensatzes: Unmittelbar klar mit Satz 4.1.

Anwendungsbeispiel: Anderer Beweis des Satzes vom Schwerpunkt eines Dreiecks

Satz vom Schwerpunkt eines Dreiecks

In einem Dreieck schneiden sich die Seitenhalbierenden (Schwerlinien) in einem Punkt S. S teilt jede Seitenhalbierende im Verhältnis 2:1.

$$\{S\} = s_c \cap s_b$$

$$\{P\} = M_c M_a \cap s_b$$

$$|\overline{SM_b}| : |\overline{SP}| = |\overline{CM_b}| : |\overline{M_c P}| = 2:1$$

(2. Strahlensatz; Zentrum S)

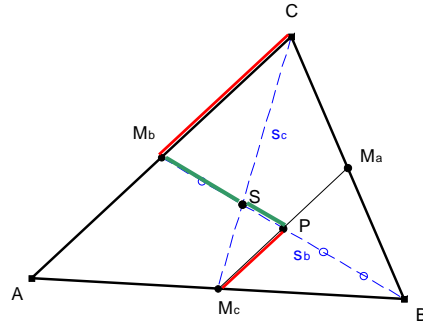
$$|\overline{PB}| = |\overline{PM_b}|$$

(1. Strahlensatz; Zentrum B)

$$\Rightarrow |\overline{BS}| : |\overline{SM_b}| = 2:1$$

Analoges gilt für s_a und s_b .

Sei $\{S^*\} = s_c \cap s_a$. Wie oben gilt für S^* auf s_b $|\overline{BS^*}| : |\overline{S^*M_b}| = 2:1 \Rightarrow S = S^*$



Teilverhältnistreue

Aus den Strahlensätzen ist beweisbar:

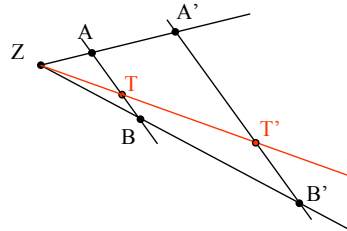
Satz 4.3

Drei Punkte A, B, T einer Geraden g werden durch zentrische Streckung auf die Punkte A', B', T' der Geraden g' abgebildet. Dann gilt:

Ist $|\overline{AT}| = r \cdot |\overline{TB}|$, so ist auch $|\overline{A'T'}| = r \cdot |\overline{T'B'}|$

Beweis:

$$\frac{|\overline{A'T'}|}{|\overline{AT}|} = \frac{|\overline{ZT'}|}{|\overline{ZT}|} = \frac{|\overline{T'B'}|}{|\overline{TB}|} \Rightarrow \frac{|\overline{A'T'}|}{|\overline{T'B'}|} = \frac{|\overline{AT}|}{|\overline{TB}|} = r$$



4.3 Flächeninhalt und Volumen bei zentrischer Streckung

Satz 4.4

Bei einer zentrischen Streckung mit dem Faktor k wird

- jede Fläche auf eine Fläche mit k^2 fachem Inhalt abgebildet,
- jeder Körper auf einen Körper mit k^3 fachem Volumen abgebildet.

Anwendung:

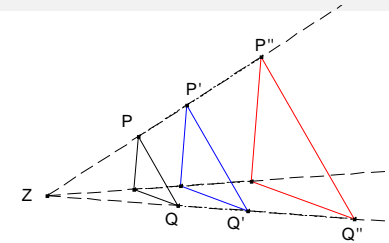
Wird ein massiver Körper aus homogenem Material auf das k-fache vergrößert, dann nimmt sein Volumen und damit sein Gewicht auf das k^3 -fache zu. Verdoppelt man bei einer massiven Gipsfigur also die Höhe, „ohne die Form zu ändern“ (d.h. streckt sie mit dem Faktor 2), dann nimmt das Gewicht auf das 8-fache zu.

4.4 Hintereinanderausführen von zentrischen Streckungen

a) gleiches Streckzentrum

Satz 4.5 a)

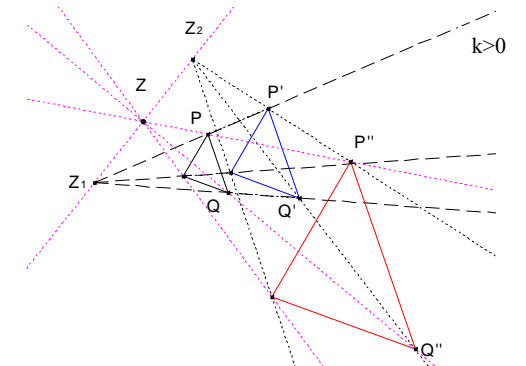
Das Hintereinanderausführen von zwei zentrischen Streckungen mit gemeinsamem Streckzentrum Z und den Streckfaktoren k_1 und k_2 lässt sich ersetzen durch eine zentrische Streckung mit Streckzentrum Z, Streckfaktor $k_1 \cdot k_2$.



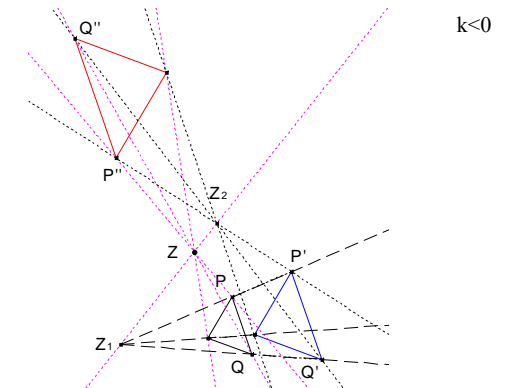
b) verschiedene Streckzentren

Fall 1: $k_1 \cdot k_2 \neq 1$

Alle Streckenlängen werden mit dem Faktor $k = k_1 \cdot k_2 \neq 1$ verändert, Strecke und Bildstrecken sind parallel und gleich gerichtet für $k > 0$, parallel und entgegen gerichtet für $k < 0$. Daher schneiden sich die Verbindungsgeraden aller Punktepaare P, P'', Q, Q''.



Zu zeigen ist, dass alle sich im gleichen Punkt Z schneiden. Dies folgt aus der Parallelität von Strecken und Bildstrecken zusammen mit der Tatsache, dass das Verhältnis von Bildstrecke zu Urbildstrecke k ist (Argumente sind genauer auszuführen).

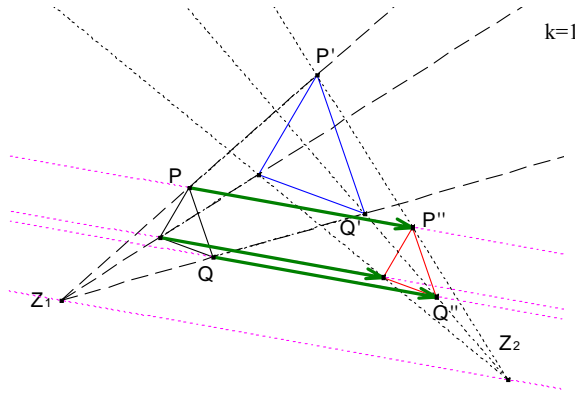


Da die Gerade $Z_1 Z_2$ Fixgerade für beide zentrischen Streckungen ist, ist sie auch Fixgerade für die Verkettung der beiden Streckungen. Das Zentrum Z muss also auf $Z_1 Z_2$ liegen.

Fall 2: $k_1 \cdot k_2 = 1$

Alle Streckenlängen bleiben unverändert, Strecke und Bildstrecken sind parallel und gleich gerichtet. Daher sind die Verbindungsgeraden aller Punktepaare P, P'', Q, Q'' parallel, die entsprechenden Verbindungsstrecken gleich lang und gleich gerichtet (Argumente sind genauer auszuführen).

Daher ist die Verkettung eine Verschiebung mit Fixgerade Z_1Z_2 , also parallel zu Z_1Z_2 .

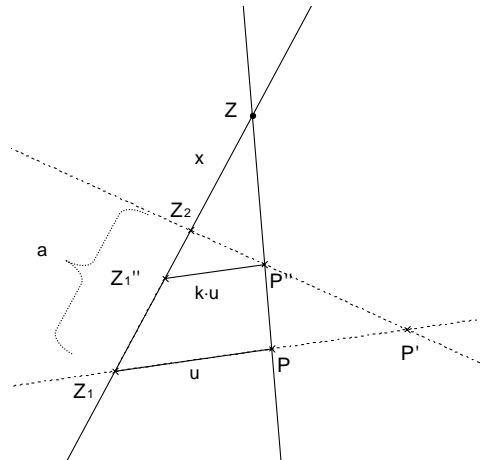


Satz 4.5 b)

Das Hintereinanderausführen von zwei zentrischen Streckungen mit verschiedenen Streckzentren und den Streckfaktoren k_1 und k_2 lässt sich ersetzen

- durch eine zentrische Streckung, falls $k_1 \cdot k_2 \neq 1$, (Streckzentrum auf Z_1Z_2)
- durch eine Verschiebung, falls $k_1 \cdot k_2 = 1$ (Verschiebung $\parallel Z_1Z_2$)

Der eben geführte Beweis von Satz 4.5 ist zwar anschaulich, weist aber einige Lücken auf. Daher geben wir noch einen ausführlichen lückenlosen Beweis an, der aber weniger anschaulich ist. Zudem liefert er noch Aussagen über die Lage des Streckzentrums bzw. die Größe des Verschiebungsvektors.



Wir bezeichnen die beiden zentrischen Streckungen mit $Z(Z_1, k_1)$ und $Z(Z_2, k_2)$. Es gilt

Z_1 ist Fixpunkt von $Z(Z_1, k_1)$, d.h. $Z_1' = Z_1$,

Z_1'' ist durch $Z(Z_2, k_2)$ festgelegt so dass $\overline{Z_2 Z_1''} = k_2 \cdot \overline{Z_2 Z_1}$.

Sei P ein beliebiger Punkt, sein P' das Bild unter $Z(Z_1, k_1)$, und P'' dessen Bild unter $Z(Z_2, k_2)$. Ist

$|\overline{Z_1 P}| = u$, dann ist $|\overline{Z_1 P'}| = k_1 \cdot u$. Die Strecke $\overline{Z_1'' P''}$ ist Bild von $\overline{Z_1 P'}$ unter $Z(Z_2, k_2)$, hat also die Länge

$k_2 \cdot k_1 \cdot u = k \cdot u$.

Fall $k \neq 1$

Die Gerade PP'' schneidet für $k \neq 1$ die Gerade Z_1Z_2 im Punkt Z . Wir zeigen, dass Z unabhängig von P ist, also alle Geraden PP'' durch Z gehen.

Aus dem 2. Strahlensatz folgt $\frac{|\overline{Z_1 Z}|}{|\overline{Z'' Z}|} = \frac{u}{k \cdot u} = \frac{1}{k}$, also unabhängig von P . Dadurch ist Z unabhängig von P

festgelegt.

Ist x die Entfernung von Z und Z_2 , dann kann man x (mit Vorzeichen) berechnen:

$$\frac{x+a}{x+k_2 \cdot a} = \frac{1}{k} \Rightarrow x = \frac{k_2(1-k_1)}{k_1 k_2 - 1} \cdot a.$$

Fall $k=1$

$\overline{Z_1'' P''}$ ist parallel zu $\overline{Z_1 P}$ und gleich lang und gleich gerichtet und geht durch Z_1'' . Das zeigt, dass P'' aus P durch Verschiebung um den Vektor $\overline{Z_1 Z_1''}$ hervorgeht, unabhängig von der Lage von P . $\overline{Z_1 Z_1''}$ ist offensichtlich $(1-k_2) \cdot \overline{Z_1 Z_2}$.

4.5 Ähnlichkeitsabbildungen

Definition 4.2

Eine Abbildung $f: E \rightarrow E$ heißt **Ähnlichkeitsabbildung**
 $\Leftrightarrow f$ ist bijektiv, geradentreu und winkeltreu

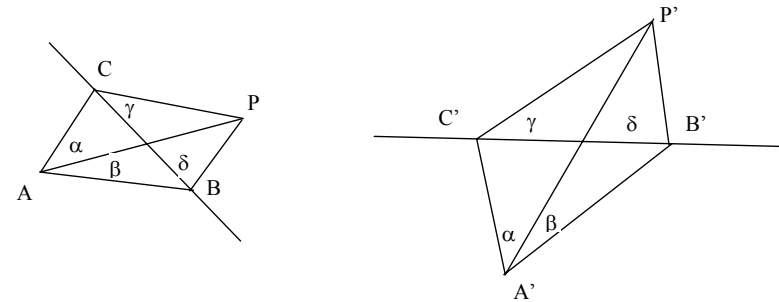
Satz 4.6

Durch das Abbilden eines einzigen Dreiecks ist eine Ähnlichkeitsabbildung eindeutig festgelegt.

Beweis (ganz analog zum Beweis des entsprechenden Satzes 2.6 für Kongruenzabbildungen):

Das Bild eines (nicht ausgearteten) Dreiecks ABC sei $A'B'C'$. Sei P ein beliebiger Punkt der Ebene. Wir müssen zeigen, dass das Bild von P eindeutig festgelegt ist. Dazu zeichnen wir die Gerade AP (für $P \neq A$).

$\alpha, \beta, \gamma, \delta$ seien die Winkel gemäß unten stehender Abbildung. Durch die Abbildung des Dreiecks ABC auf $A'B'C'$ ist wegen der Winkeltreue auch das Bild des Vierecks $ABPC$ mit den entsprechenden Winkeln eindeutig bestimmt. Damit liegt das Bild von P eindeutig fest.



Übung: Zeichnen Sie Skizzen für weitere mögliche Lagen von P und prüfen, Sie, ob dann die Argumentation oben ebenfalls richtig ist.

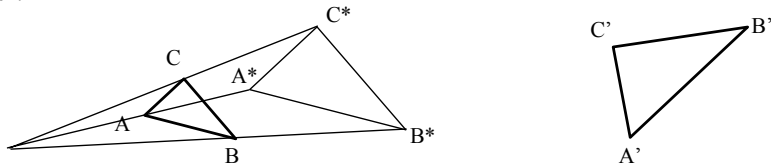
Satz 4.7

Die Ähnlichkeitsabbildungen sind genau die Verkettungen einer zentrischen Streckung mit einer Kongruenzabbildung.

Beweis

Offensichtlich ist jede Verkettung einer zentrischen Streckung mit einer Kongruenzabbildung bijektiv, geradentreu und winkeltreu, also eine Ähnlichkeitsabbildung.

Sei andererseits eine Ähnlichkeitsabbildung gegeben. Nach Satz 4.6 ist sie durch die Abbildung eines einzigen Dreiecks ABC auf sein Bilddreieck A'B'C' eindeutig bestimmt. Man kann das Dreieck ABC durch eine zentrische Streckung auf ein Dreieck A*B*C* abbilden, für das die Seite $\overline{A^*B^*}$ die gleiche Länge hat wie $\overline{A'B'}$. Da alle Winkel von ABC, A'B'C' und A*B*C* gleich sind müssen A*B*C* und A'B'C' kongruent sein und A*B*C* kann daher durch eine Kongruenzabbildung auf A'B'C' abgebildet werden.

**4.6 Die Gruppe (\mathbb{A}, \circ) aller Ähnlichkeitsabbildungen einer Ebene**

\mathbb{A} = Menge aller Ähnlichkeitsabbildungen $E \rightarrow E$;

\circ = „Hintereinanderausführen“

Es gilt:

- \mathbb{A} ist **abgeschlossen** unter \circ
- **Assoziativgesetz** gilt $(f \circ g) \circ h = f \circ (g \circ h)$
- „id“ (die identische Abbildung) ist **neutrales** Element; $\text{id} \in \mathbb{A}$
- mit jedem $f \in \mathbb{A}$ ist auch das **inverse** Element $f^{-1} \in \mathbb{A}$

Satz 4.8

(\mathbb{A}, \circ) ist eine (unendliche) Gruppe
 (\mathbb{K}, \circ) ist eine Untergruppe von (\mathbb{A}, \circ) .

4.7 Ähnliche Figuren und Ähnlichkeitssätze

Jetzt kann Ähnlichkeit von Figuren streng mathematisch definiert werden:

Definition 4.3

Zwei Figuren heißen **ähnlich**

\Leftrightarrow es gibt eine Ähnlichkeitsabbildung, die die Figuren aufeinander abbildet.

Satz 4.9

Ähnliche Figuren stimmen

1. in allen einander entsprechenden Winkeln und
2. in den Längenverhältnissen aller einander entsprechenden Linien überein.

Beweis:

Die 1.Eigenschaft folgt sofort aus der Definition von Ähnlichkeit. Die 2.Eigenschaft folgt daraus, dass bis auf eine Kongruenzabbildung die Figuren durch zentrische Streckung auseinander hervorgehen und sich die Längen einer Figur nur um den Streckungsfaktor k von denen der anderen unterscheiden. Sind a und b zwei Längen in einer Figur, dann sind die entsprechenden Längen in der anderen Figur $k \cdot a$ und $k \cdot b$ und damit die Verhältnisse $\frac{k \cdot a}{k \cdot b}$ und $\frac{a}{b}$ gleich. Dies gilt nicht nur für Längen von Strecken sondern auch für die Längen nicht geradliniger Linien (z.B. Kreisbögen, Kreise usw., vergl. S.34).



Um die Ähnlichkeit von Dreiecken nachzuweisen benutzt man häufig die Ähnlichkeitssätze, die man unmittelbar aus den entsprechenden Kongruenzsätzen für Dreiecke gewinnt.

Ähnlichkeitssatz	entsprechender Kongruenzsatz
Stimmen zwei Dreiecke in	Stimmen zwei Dreiecke in
<ul style="list-style-type: none"> • den Verhältnissen der drei Seiten oder	<ul style="list-style-type: none"> • den drei Seiten (sss) oder
<ul style="list-style-type: none"> • zwei Winkeln oder	<ul style="list-style-type: none"> • einer Seite und den anliegenden Winkeln (wsw) oder
<ul style="list-style-type: none"> • den Verhältnissen von zwei Seiten und dem eingeschlossenen Winkel oder	<ul style="list-style-type: none"> • zwei Seiten und dem eingeschlossenen Winkel (sws) oder
<ul style="list-style-type: none"> • den Verhältnissen von zwei Seiten und dem der größeren Seite gegenüber liegenden Winkel 	<ul style="list-style-type: none"> • zwei Seiten und dem der größeren Seite gegenüber liegenden Winkel (Ssw)
überein, dann sind sie zueinander ähnlich .	überein, dann sind sie zueinander kongruent.

Aufgabe

Führen Sie die Beweise für die Ähnlichkeitssätze aus.

Man kann die Ähnlichkeitssätze immer an Stelle der Strahlensätze benutzen.

In amerikanischen Geometriebüchern für die Schule findet man z.B. gar keine Strahlensätze, alle Argumente benutzen entweder zentrische Streckungen oder Sätze über ähnliche Dreiecke.

Aufgabe

Zeigen Sie, wie die Strahlensätze durch Sätze über ähnliche Dreiecke ersetzt werden können.

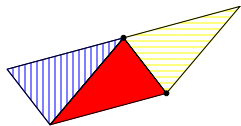
5 Dreieckslehre

5.1 Bedeutung der Dreiecke

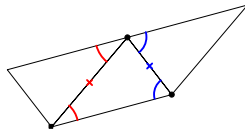
Durch **Triangulation** lassen sich Vielecke in Dreiecke zerlegen (n Eck in n-2 Dreiecke)
 ⇒ Beweis von Sätzen mittels Sätzen über Dreiecke
 (z.B. Winkelsumme, Flächeninhalt, Kongruenz)

5.2 Winkelsumme im Dreieck

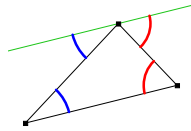
Experimentell gewinnbar z.B.



beim Parkettieren



über Punktspiegelungen



durch Winkelsätze an Parallelen

Satz 5.1
 Die Winkelsumme im n-Eck beträgt $(n-2) \cdot 180^\circ$.

5.3 Besondere Punkte im Dreieck

Besonderheit beim Dreieck: 3 "gleichartige" Geraden gehen durch 1 Punkt!

Satz 5.2 (Besondere Linien im Dreieck)

In einem Dreieck schneiden sich

- a) die **Mittelsenkrechten** im **Umkreismittelpunkt U**;
 Dreieck spitzwinklig: U innerhalb des Dreiecks
 Dreieck rechtwinklig: U auf der längsten Dreiecksseite
 Dreieck stumpfwinklig: U außerhalb des Dreiecks
- b) die **Winkelhalbierenden** im **Inkreismittelpunkt**;
- c) die **Seitenhalbierenden** im **Schwerpunkt S**;
 dieser teilt die Seitenhalbierenden im Verhältnis 2:1;
- d) die **Höhen** im **Höhenschnittpunkt**.

Satz 5.3 (Satz vom Mittendreieck)

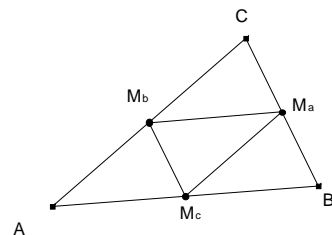
Verbindet man die Seitenmitten eines Dreiecks, so liegen die Seiten des entstehenden Dreiecks parallel zu Seiten des Ausgangsdreiecks und sind halb so lang.

Beweise (Beispiele)

Bevor wir den Satz 5.2 beweisen, beweisen wir zunächst Satz 5.3 vom **Mittendreieck**:

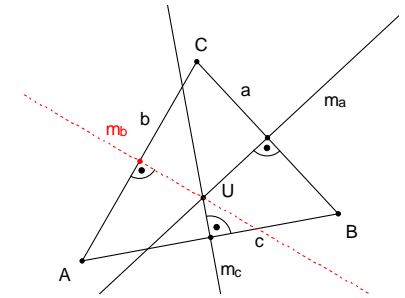
Spiegle das Mittendreieck an seinen Seitenmitten ⇒ ΔABC .
 Bei Punktspiegelung gilt: Bildstrecke || Originalstrecke.

Hinweis: Eigentlich wird nur bewiesen, dass man, ausgehend von $\Delta M_a M_b M_c$ ein Dreieck ΔABC erhält, dessen Mittendreieck $\Delta M_a M_b M_c$ ist. Es wäre zu zeigen, dass man - ausgehend von ΔABC und dessen Mittendreieck $\Delta M_a M_b M_c$ - durch diese Spiegelung wieder zu ΔABC gelangt.



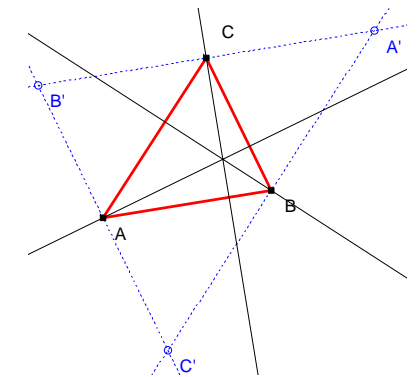
Satz 5.2 a): Umkreismittelpunkt

Sei $U = m_a \cap m_c$
 Wegen $|\overline{AU}| = |\overline{BU}|$ und $|\overline{BU}| = |\overline{CU}|$ ist $|\overline{AU}| = |\overline{CU}|$
 ⇒ $U \in m_b$
 ⇒ U liegt auf allen Mittelsenkrechten und hat von allen Ecken denselben Abstand

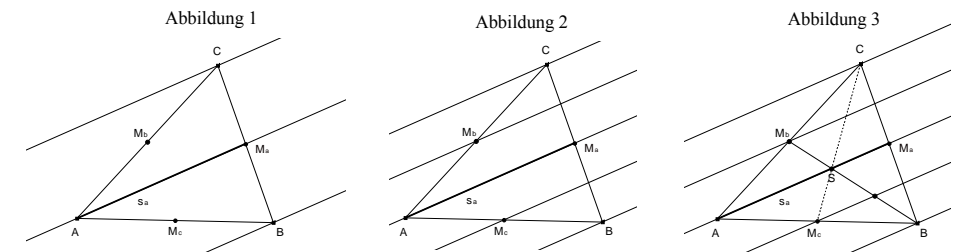


Satz 5.2 d): Höhen im Dreieck

Zeichne Dreieck $A'B'C'$ so, dass ABC Mittendreieck von $A'B'C'$ wird!
 Höhen von ABC sind Mittelsenkrechten von $A'B'C'$.



Satz 5.2 c): Seitenhalbierende



Zur Seitenhalbierenden s_a werden die Parallelen durch C und B gezeichnet; diese haben den gleichen Abstand von s_a , da s_a durch die Seitenmitte von AB geht (Abbildung 1). Dann zeichnet man die Parallelen zu s_a durch M_b und M_c . Diese sind Mittelparallelens zu den zuvor gezeichneten Parallelenpaaren, es liegt jetzt eine Schar von Parallelen mit gleichen Abständen vor (Abbildung 2). Zeichnet man die Seitenhalbierende $s_b = \overline{BM_b}$, so teilt der Schnittpunkt S von s_a und s_b die Strecke s_b im Verhältnis 2:1. Diese Argumentation kann statt für s_a und s_b für jedes Paar von Seitenhalbierenden wiederholt werden und zeigt daher: Der Schnittpunkt einer Seitenhalbierenden mit einer zweiten teilt diese im Verhältnis 2:1. Daraus folgt unmittelbar, dass alle Seitenhalbierenden durch einen gemeinsamen Punkt S gehen müssen, der die Seitenhalbierenden im Verhältnis 2:1 teilt.

Euler-Gerade (L.Euler, 1765):

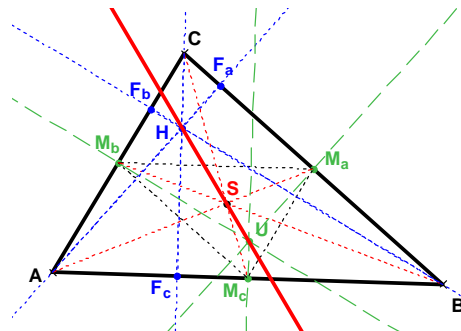
Umkreismittelpunkt U, Schwerpunkt S und Höhen-Schnittpunkt H liegen auf einer Geraden.

(Genauigkeits-Prüfer!)

Es ist $|SH| = 2 \cdot |US|$

Der Beweis verwendet die Tatsache, dass das Dreieck ABC durch zentrische Streckung mit Zentrum S und Streckfaktor $\frac{1}{2}$ in das Mittendreieck $M_a M_b M_c$ übergeht, wobei die Höhen von Dreieck ABC auf die Höhen des Mittendreiecks $M_a M_b M_c$ übergehen. Diese sind gerade die Mittelsenkrechten von Dreieck ABC. Damit geht H durch Streckung mit Zentrum S und Streckfaktor $\frac{1}{2}$ in U über.

Detaillierte Begründung siehe z.B. KIRSCHKE, PETER, S. 106.



5.4 Kongruenzsätze

Die Kongruenzsätze haben wir zu Beginn als „Axiome“ in der folgenden Form vorausgesetzt: Stimmen zwei Dreiecke in

- den drei Seiten (sss), oder
- einer Seite und den anliegenden Winkeln (wsw), oder
- zwei Seiten und dem eingeschlossenen Winkel (sws), oder
- zwei Seiten und dem der größeren Seite gegenüber liegenden Winkel (Ssw),

überein, dann stimmen sie in allen Maßen überein.

Wir haben mit Satz 2.9 gezeigt, dass je zwei in allen Bestimmungsstücken übereinstimmenden Dreiecke durch genau eine Kongruenzabbildung aufeinander abgebildet werden können.

5.5 Geometrische Orte

Gegeben: ΔABC . AB wird festgehalten; C wird so bewegt, dass

- der Flächeninhalt (C auf Parallele zu AB , genauer zwei Parallelen im gleichen Abstand zu AB)
- der Umfang (C auf Ellipse mit Brennpunkten A und B)
- Winkel γ (C auf einem Kreisbogen über \overline{AB})

unverändert bleibt.

Man nennt diese Kurven (Punktmengen) den „geometrischen Ort der Punkte mit einer gewissen Eigenschaft“.

Im Beispiel:

„Der geometrische Ort aller Punkte C' , für die das Dreieck ABC' mit den festen Punkten A,B den gleichen Flächeninhalt wie das Dreieck ABC hat, ist eine Parallele zu AB“, „Der geometrische Ort aller Punkte C' , für die das Dreieck ABC' mit den festen Punkten A,B den gleichen Umfang wie das Dreieck ABC hat, ist eine Ellipse“.

Aufgabe

Definieren Sie die folgenden Kurven jeweils als „geometrischen Ort“:

- Der Kreis mit Mittelpunkt M und Radius r.

- Die Mittelsenkrechte der Strecke \overline{AB} .
- Die Winkelhalbierende des Winkels $\angle h_f, h_g$ mit den Halbgeraden h_f, h_g als Schenkel.
- Die Seitenhalbierende s_c zur Seite c im Dreieck ABC.

Welche Definition einer Ellipse als Ortslinie ergibt sich aus der 2. Eigenschaft der Beispiele oben?

5.6 Winkelsätze: Umfangswinkelsatz und Sehnen-Tangenten-Winkelsatz

Satz 5.4

- (a) Die Umfangswinkel (Peripherie-Winkel γ) auf einem Kreisbogen über einer Strecke \overline{AB} sind alle gleich groß (und $\frac{1}{2}$ so groß wie der zugehörige Mittelpunktswinkel μ)
- (b) Die Scheitel C aller Dreiecke ABC mit gleichem Winkel γ bei C über einer Strecke \overline{AB} liegen auf einem Kreisbogen, der durch A und B verläuft.

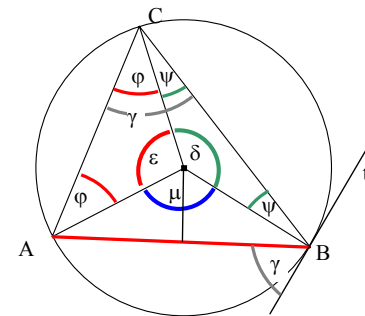
Kurz:

Der geometrische Ort aller Punkte C, für die die Strecke \overline{AB} unter dem gleichen Winkel γ erscheint, ist ein Kreisbogen durch die Punkte A und B.

- (c) Der Winkel zwischen der Sehne \overline{AB} und der Tangente in B (Sehnen-Tangenten-Winkel) ist ebenso groß wie der Peripheriewinkel γ (und $\frac{1}{2}$ so groß wie der zugehörige Mittelpunktswinkel).

Sonderfall: Satz des Thales

zu (a):



Andere Lagen des Punktes C?

Umfangswinkel $\gamma = \varphi + \psi$
Mittelpunktswinkel = μ

$$\begin{aligned} 2\varphi + \varepsilon &= 180^\circ \\ 2\psi + \delta &= 180^\circ \\ \mu &= 360^\circ - \varepsilon - \delta \\ &= 360^\circ - (180^\circ - 2\varphi) - (180^\circ - 2\psi) \\ &= 2\varphi + 2\psi \end{aligned}$$

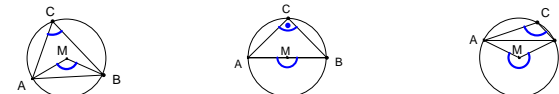
Umfangswinkel = $\frac{1}{2} \mu$
konstant!

zu (b): Sei K der Kreis über \overline{AB} zum Winkel γ aus (a). Offenbar ist für alle Punkte C' , die außerhalb des Kreises K liegen, der Winkel bei C' kleiner als γ , für C' innerhalb von K größer als γ (Begründung?).

Zu (c): Die Winkelhalbierende des Mittelpunktswinkels μ steht senkrecht auf der Sehne \overline{AB} , der Berührradius steht senkrecht auf der Tangente t in B. Da Winkel, deren Schenkel paarweise senkrecht aufeinander stehen, gleich sind, folgt die Behauptung.

Bemerkung:

Es ist in der oben gewählten Formulierung nicht ganz eindeutig, welcher Mittelpunktswinkel zu einem gegebenen Umfangswinkel gehört. Die folgenden Skizzen sollen den Sachverhalt verdeutlichen.

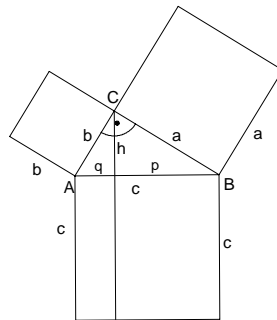


5.7 Flächensätze: Pythagoras-Satzgruppe

Satz 5.5

Im rechtwinkligen Dreieck

- ist das Hypotenusenquadrat so groß wie die Summe der Kathetenquadrate,
- ist ein Kathetenquadrat so groß wie das Rechteck aus Hypotenuse und anliegendem Hypotenusenabschnitt
- ist das Quadrat über der Höhe so groß wie das Rechteck aus den beiden Hypotenusenabschnitten



Satz des Pythagoras $a^2 + b^2 = c^2$

Kathetensatz (Satz des Euklid) $a^2 = p \cdot c$, $b^2 = q \cdot c$

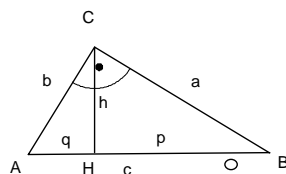
Höhensatz $h^2 = p \cdot q$

Zu kaum einem Satz gibt es so viele verschiedene Beweise und Veranschaulichungen wie zum Satz des Pythagoras. Hier wird zunächst ein Beweis für alle Sätze der Gruppe mit Hilfe des Ähnlichkeitsbegriffes angegeben. Weitere Beweise folgen im Kapitel über den Flächeninhalt⁴. Während jene Beweise die Sätze als Aussagen über Flächeninhalte auffassen steht hier die Aussage über den Zusammenhang von Streckenlängen im Vordergrund.

Beweis aller drei Sätze mit Hilfe ähnlicher Dreiecke

Im nebenstehenden Dreieck identifiziert man leicht drei zueinander ähnliche Dreiecke:

$\Delta ABC \sim \Delta CBH \sim \Delta ACH$

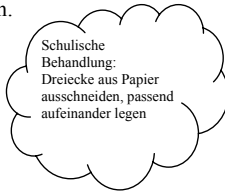


Mit diesen Dreiecken kann man viele Verhältnismgleichungen für entsprechende Seiten aufstellen. Sucht man nur diejenigen heraus, in denen nur 3 verschiedene Stücke vorkommen, so erhält man durch Umformen leicht den Kathetensatz und den Höhensatz. Der Satz des Pythagoras folgt unmittelbar aus den beiden Formen des Kathetensatzes durch Addition.

Kathetensatz: $c:a = a:p \Rightarrow a^2 = c \cdot p$
 $c:b = b:q \Rightarrow b^2 = c \cdot q$

Höhensatz: $h:p = q:h \Rightarrow h^2 = p \cdot q$

Pythagoras: $a^2 + b^2 = c \cdot p + c \cdot q = c(p+q) = c^2$



⁴ Vergl. S.34 und S.34

6 Viereckslehre

6.1 Haus der Vierecke

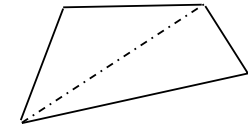
Ordnung in der Menge der Vierecke nach der Anzahl und Art der Symmetrien.

Andere Art der Ordnung:

Art, Anzahl und Lage gleichlanger Seiten, gleichgroßer Winkel, Winkel zwischen Diagonalen. Nicht so systematisch, aber für die Schule besser geeignet.

6.2 Winkelsumme im Viereck

- experimentell gewinnbar z.B. beim Parkettieren
- Punktspiegelungen
- Triangulation

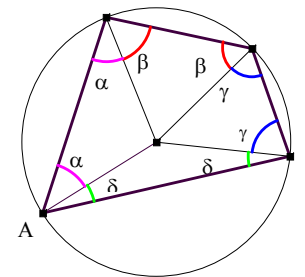


6.3 Vierecke mit Umkreis („Sehnen-Viereck“)

Satz 6.1: Ein Parallelogramm hat genau dann einen Umkreis, wenn es ein Rechteck ist. (Thales)

Satz 6.2: Ein Viereck besitzt genau dann einen Umkreis, wenn zwei gegenüberliegende Winkel zusammen 180° groß sind.

(a) Das Viereck möge einen Umkreis besitzen.

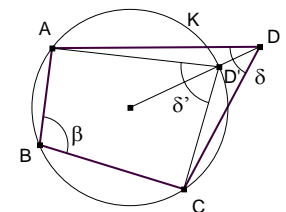


Man verbindet die Eckpunkte des Vierecks mit dem Mittelpunkt des Umkreises. Es entstehen vier gleichschenklige Dreiecke, die daher gleiche Basiswinkel haben. Die Summe einander gegenüber liegender Winkel ist also jeweils $\alpha + \beta + \gamma + \delta$.
 Kürzerer Beweis:
 Verwende den Satz vom Umfangswinkel über einer Diagonalen

Andere Lagen der Punkte A, B?

(b) Die Summe einander gegenüber liegender Winkel des Vierecks zusammen betragen 180°. Es ist zu zeigen, dass das Viereck einen Umkreis besitzt.

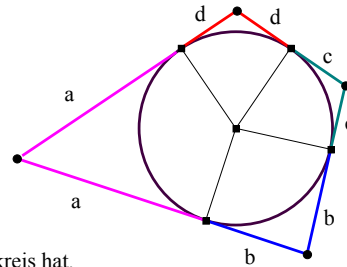
Sei K der Umkreis des Dreiecks ABC. Nach (a) ist für D' auf K die Summe $\beta + \delta' = 180^\circ$. Liegt D nicht auf K, dann ist δ kleiner oder größer als δ' , also $\beta + \delta \neq 180^\circ$ (K ist die Ortslinie für die Scheitel aller Winkel über \overline{AC} der Größe $180^\circ - \beta$).



6.4 Vierecke mit Inkreis („Tangenten-Viereck“)

Satz 6.3: Ein Viereck besitzt genau dann einen Inkreis, wenn die Summe der Längen gegenüberliegender Seiten gleich groß ist.

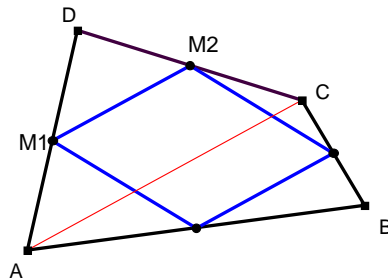
(a) Das Viereck möge einen Inkreis besitzen. Dann ist die Summe der Längen gegenüberliegender Seiten offensichtlich $a+b+c+d$.



(b) Die Summe der Längen gegenüber liegender Seiten sei gleich. Es ist zu zeigen, dass das Viereck einen Inkreis hat. → Übung.

6.5 Das Mittenviereck

Satz 6.4: Die Mitten der Seiten eines Vierecks bilden stets ein Parallelogramm.



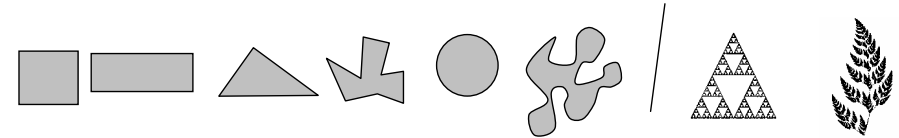
Beweis: Satz vom Mittendreieck (Satz 5.3, S.34)

Aufgabe:

Beweisen Sie, dass der Flächeninhalt des Mittenparallelogramms die Hälfte des Inhaltes der Vierecksfläche beträgt.

7 Der Flächeninhalt

Der Flächeninhalt einer Figur soll etwas über deren Größe aussagen. Intuitiv scheint der Flächeninhaltsbegriff „irgendwie klar“ zu sein. Er wird schon ab der Grundschule durch Auslegen verschiedener einfacher Figuren mit Plättchen vorbereitet und gegen einen anderen Begriff von Größe, den Umfang einer Figur, abgegrenzt. So bildet sich eine Vorstellung, was es bedeutet, dass zwei Figuren den gleichen Flächeninhalt haben. In der Geometrie als reiner Mathematik können Figuren wachsender Kompliziertheit betrachtet werden, denen man ab einer gewissen Stufe vielleicht gar keinen Flächeninhalt im intuitiven Sinne mehr zuordnen möchte. Es gibt daher eine Folge immer mehr verfeinerter Definitionen des Flächeninhaltsbegriffs, die auch den Messprozess festlegen.



Welchen Figuren sind Sie bereit, einen „Flächeninhalt“ zuzusprechen? Wie sollte der definiert und gemessen werden?

Den „Flächeninhalt zu bestimmen“ bedeutet in der reinen Mathematik, möglichst vielen Figuren F der Ebene eine (Maß-)Zahl $A(F)$ zuzuordnen. Diese Zuordnung sollte alle Eigenschaften besitzen, die man vom intuitiven Flächeninhaltsbegriff selbstverständlich erwartet:

- (1) $A(F) \geq 0$ für alle Figuren F ,
- (2) $A(F_1 \cup F_2) = A(F_1) + A(F_2)$ wenn $F_1 \cap F_2 = \emptyset$, (F_1, F_2 haben keine gemeinsamen Punkte),
- (3) $A(F') = A(F)$ wenn F' kongruent zu F ist,
- (4) $A(Q_e) = 1$ für ein (beliebig) ausgezeichnetes „Einheitsquadrat“ Q_e .

Im Folgenden soll dieser Prozess für die in der Schulmathematik relevanten Figuren genauer betrachtet und in einigen Beispielen angewandt werden. Statt den Flächeninhalt explizit zu definieren beschreibt man meist nur den Messprozess.

7.1 Flächeninhalt als Größe

Im *Alltagsgebrauch* wird man Figuren mit einem Flächeninhalt von 0 (z.B. einzelne Punkte, Strecken) nicht als „Fläche“ akzeptieren und ihnen auch keinen Flächeninhalt zuordnen. Lässt man diese Flächen weg, dann bilden die Flächeninhalte einen so genannten „Größenbereich“ (→ Vorlesung über Größenbereiche).

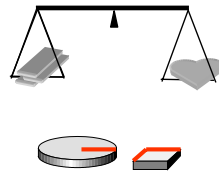
In einem Größenbereich G sind Addition $+$ und Kleiner-Relation $<$ erklärt:

- (1) $a + b = b + a$ Kommutativgesetz
- (2) $(a + b) + c = a + (b + c)$ Assoziativgesetz
- (3) entweder $a < b$ oder $b < a$ oder $a = b$ Trichotomie
- (4) $a < b \Leftrightarrow$ es gibt ein $c \in G$ mit $a + c = b$ eingeschränktes Lösbarkeitsgesetz

7.2 Der Messprozess

Bei der Entwicklung der Vorstellung des Flächeninhaltsbegriffs spielt sicher das physikalische Modell einer aus homogenem Material gleicher Dicke ausgeschnittenen „Figur“ eine Rolle. Dabei haben Figuren gleichen Flächeninhalt wenn sie gleiches Gewicht haben. Den Flächeninhalt verschiedener Figuren kann man in diesem Sinne experimentell unmittelbar vergleichen, indem man die Figuren

herstellt aus geeignetem Material und ihr Gewicht vergleicht. Durch Vergleichen des Gewichts einer Figur mit dem mehrerer Einheitsquadrate kann man Figuren Flächenmaßzahlen zuordnen. Die Verbindung des Flächen-Messprozesses mit einem physikalischen Wägeprozess lässt sich nicht in die Mathematik übertragen. Das Verfahren findet seine Grenze außerdem bei „Figuren“, die nicht herstellbar sind. Zur Gewinnung von Flächeninhaltsformeln ist es auch nur bedingt einsetzbar, da man durch Wägung zunächst nur Zahlenwerte erhält, die oft die Abhängigkeit von bestimmenden Größen nicht erkennen lassen.



Mathematische Flächeninhaltsbegriffe:

- Auslegen einer Fläche mit zueinander deckungsgleichen Figuren und Anzahlbestimmung (=> z.B. Inhaltsformel für Rechtecke, für die Schule bestens geeignet und gebräuchlich)
Grenzen des Messprozesses durch Auslegen:
 - Theoretisch problematisch bei Rechtecken mit Seiten, die zu denen des Einheitsquadrates inkommensurabel sind.
 - Vergleich beliebiger Dreiecke.
 - krummlinig begrenzte Figuren.
- Begriffe „Zerlegungsgleichheit“ und „Ergänzungsgleichheit“ von Figuren. Verwendbar für geradlinig begrenzte Figuren (Polygone).
- Grenzprozesse durch Annäherung komplizierter Flächen durch einfachere (=> z.B. Kreisfläche). Mathematisch einwandfreies Verfahren, aber in der Schule nur propädeutisch möglich. Strebt man dagegen nicht die Entwicklung eines exakten Flächeninhaltsbegriffes an, kann das Verfahren zur näherungsweise Bestimmung von Flächeninhalten in der Schule sehr gut verwandt werden.

7.2.1 Zerlegungsgleich - ergänzungsgleich

(Vergleich von Flächeninhalten durch Zerlegen und Umordnen)

Definition 7.1

Zwei Figuren heißen zerlegungsgleich wenn sie sich in paarweise kongruente Figuren zerlegen lassen.

Definition 7.2

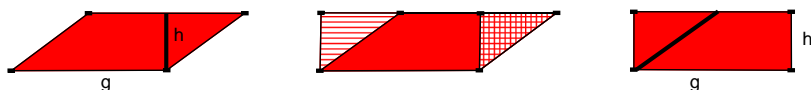
Zwei Figuren heißen ergänzungsgleich wenn sie durch Ergänzung mit kongruenten Figuren zu kongruenten (i.A. zerlegungsgleichen) Figuren ergänzt werden können.

Intuitiv scheint klar:

- Zerlegungsgleiche Figuren sind inhaltsgleich
- Ergänzungsgleiche Figuren sind inhaltsgleich

Beispiele:

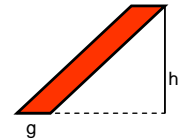
Flächeninhalt des Parallelogramms



Das Parallelogramm und das Rechteck sind zerlegungsgleich. Daraus erhält man die Flächeninhaltsformel für das Parallelogramm: $A = g \cdot h$

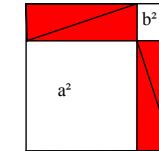
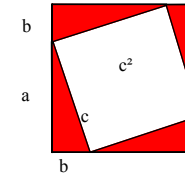
Aufgabe

Gilt dies auch für das nebenstehende Parallelogramm? Ist dieses auch zerlegungsgleich zu einem Rechteck mit den Seiten g und h ?



Ein "Pythagoras-Legebeweis"

Quadrat mit der Seitenlänge $a+b$



Die weißen Flächen sind ergänzungsgleich, d.h. sie können durch Ergänzung mit kongruenten Figuren (hier den Dreiecken) zu kongruenten (i.A. zerlegungsgleichen) Figuren ergänzt werden. Dieser Beweis findet sich häufig in Schulbüchern, er ist einfach und einleuchtend, zeigt aber die „Pythagoras-Figur“ nicht gut, das rechtwinklige Dreieck spielt eher eine untergeordnete Rolle.

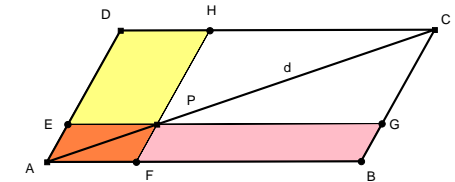
Die linke Skizze alleine kann auch benutzt werden, um den Satz über das Problem einer

Flächenberechnung algebraisch herzuleiten: $c^2 = (a+b)^2 - 4 \cdot \frac{1}{2} ab = a^2 + 2ab + b^2 - 2ab = a^2 + b^2$

Satz vom Ergänzungsparallelogramm

1. Der Satz

Gegeben ist das Parallelogramm ABCD und ein Punkt P auf der Diagonalen $d=AC$.



Durch P sind Parallelen zu den Seiten des Parallelogramms gezeichnet. Dadurch entstehen zwei Parallelogramme EPHD (gelb) und FBGP (hellrot).

Zeigen Sie, dass diese Parallelogramme den gleichen Flächeninhalt besitzen. Zeigen Sie, dass auch die Parallelogramme AFPH und BPGP den gleichen Flächeninhalt besitzen.

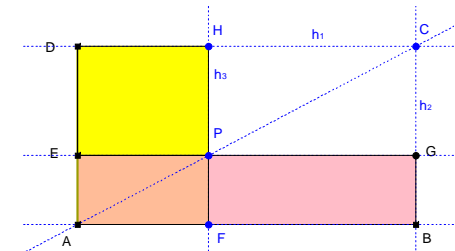
Beachten Sie: Dieser Satz gibt zunächst keinen Hinweis darauf, wie man die **Zerlegungsgleichheit** der beiden Parallelogramme nachweisen könnte!

2. Anwendung

Gegeben ist ein Rechteck ABGE (hellrot). Es soll ein dazu flächengleiches Rechteck mit einer vorgegebenen Seite AD konstruiert werden.

Konstruktion:

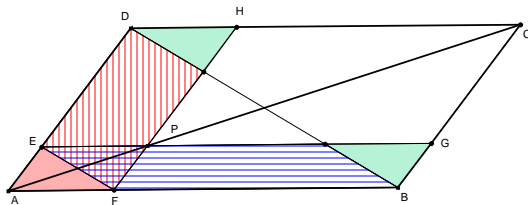
h_1 Parallele durch zu AB durch D,



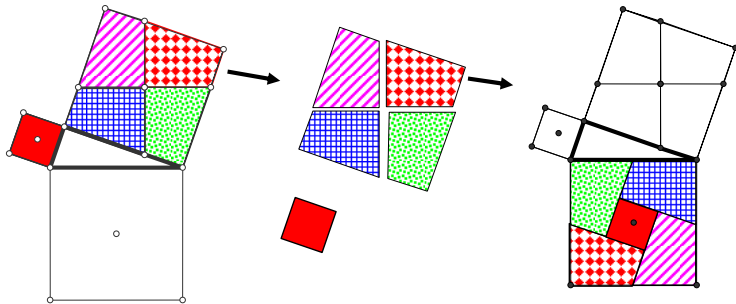
h_2 Parallele durch zu AD durch B,
 C Schnittpunkt von h_1 und h_2 ,
 P Schnittpunkt von AC mit GE,
 h_3 Parallele zu AD durch P,
 H Schnittpunkt von h_3 mit DC.
 F Schnittpunkt von h_3 mit AB.

AFHD ist das gesuchte Rechteck.

Nebestehende Skizze gibt einen Hinweis, wie man den Satz vom Ergänzungsparallelogramm auch mit Hilfe der Zerlegungsgleichheit von Figuren nachweisen kann. Man benötigt dabei, dass Parallelogramme mit gleicher Grundseite und Höhe zerlegungsgleich sind (s.o. und Übungsaufgaben).



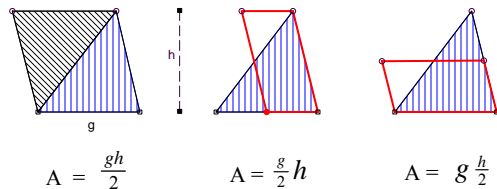
Ein "Pythagoras-Zerlegungsbeweis", „Schaufelradbeweis“



Auch dieser „Beweis“ wird in Schulbüchern oft angeboten, da er einen handlungsorientierten Zugang erlaubt und die „Pythagoras-Figur“ gut sichtbar wird. Oft wird die Ausgangsfigur mit der Zerlegung der Kathetenquadrate vorgegeben und die Beweisaufgabe als „Puzzleproblem“ gestellt. Um daraus einen korrekten Beweis zu machen, muss nachgewiesen werden, dass die Teile, in die die Kathetenquadrate zerlegt wurden, das Hypotenusenquadrat lückenlos und überlappungsfrei überdecken.

Aufgabe: Führen Sie den korrekten Beweis aus.

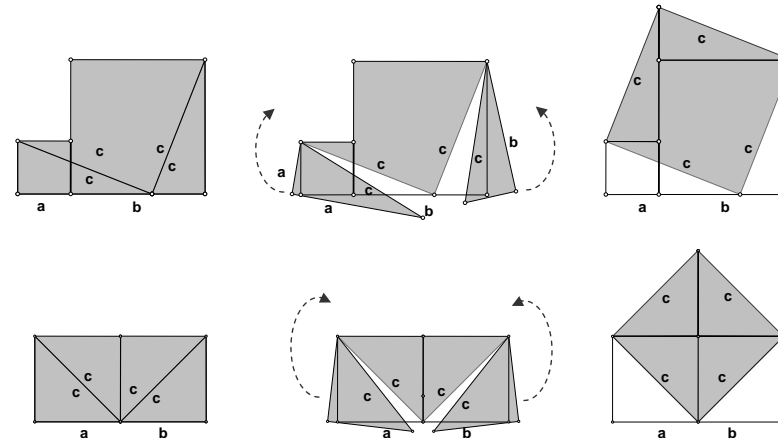
Dreiecksformeln und ihre geometrische Deutung



Die beiden letzten Herleitungen benutzen wieder den Begriff der Zerlegungsgleichheit, um zu zeigen, dass jedes Dreieck flächengleich zu einem Parallelogramm ist.

Noch ein Zerlegungsbeweis zum Satz des Pythagoras.

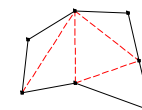
Die Konstruktion kann wieder mit Papier oder Folien von Schülern nachvollzogen werden. Sind die beiden Ausgangsquadrate gleich groß (d.h. $a=b$), dann ist diese Figur gerade die viel einfachere Figur zur Verdopplung eines Quadrates aus Platos Dialog „Menon“, mit deren Hilfe eventuell die Wurzel aus 2 eingeführt werden kann.



7.2.2 Flächeninhalt von n-Ecken

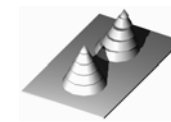
Durch „Triangulation“ kann die Berechnung von Flächeninhalten beliebiger n-Ecke auf die von Dreiecken zurück geführt werden.

Grenzen des Zerlegungs-Verfahrens: Nicht geradlinig begrenzte Flächen.



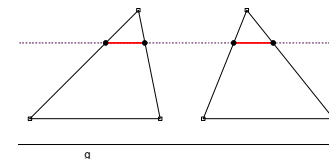
7.2.3 Das Prinzip von Cavalieri (1598 – 1647)

„Sind zwei Körper gleich hoch und ist in jeder Höhe die Schnittfläche bei beiden Körpern gleich groß, so haben die Körper dasselbe Volumen“



„Cavalieri in der Ebene“:

Kann man eine Gerade g so zeichnen, dass jede Parallele zu dieser Geraden aus zwei Flächen stets zueinander gleichlange Strecken ausschneidet, so haben die Flächen denselben Inhalt.



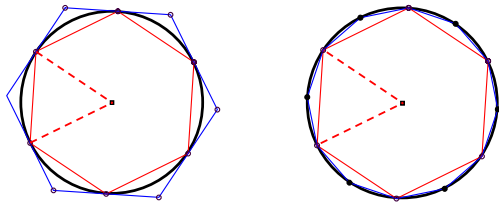
Dieses Prinzip wird in der Integralrechnung begründet und erfordert Überlegungen mit Grenzprozessen. Es kann aber anschaulich leicht plausibel gemacht werden, wenn man die Figuren auf gleicher Schnitthöhe durch schmale kongruente Rechtecke überdeckt.

7.2.4 Grenzprozesse

Beispiel: Flächeninhalt des Kreises

Um den Flächeninhalt von Kreisen zu berechnen, werden diese durch eingeschriebene und umschriebene regelmäßige n-Ecke angenähert; für $n \rightarrow \infty$ nähern sich deren Flächeninhalte von unten bzw. oben einem gemeinsamen Wert an. Diesen Wert **definiert** man als den Flächeninhalt des Kreises.

Wir sagen:
„Intervallschachtelung“ liefert den Flächeninhalt des Kreises.



Ein- und umschriebenes Sechseck

Einbeschriebenes Sechseck und Zwölfeck

Dasselbe Verfahren verwendet man, um den Umfang von Kreisen zu definieren und zu berechnen. Meist bestimmt man *zuerst* den Umfang von Kreisen und definiert in diesem Zusammenhang die Kreiszahl π als Proportionalitätsfaktor zwischen Durchmesser und Umfang und führt dann die Berechnung des Flächeninhalts auf die Umfangsberechnung zurück. Dieses Verfahren soll hier kurz dargestellt werden.

Definition der Kreiszahl π

Da alle Kreise zu einander ähnlich sind, ist das Verhältnis von Umfang zu Durchmesser konstant. Dieses Verhältnis wird als Zahl π definiert.

Man hätte die Zahl π auch über die Berechnung des Flächeninhaltes definieren können. Es scheint aber leichter einzusehen, dass für alle Kreise das Verhältnis Umfang/Durchmesser eine Konstante ist als das Verhältnis Flächeninhalt/Radius². Beides ist richtig, da alle Kreise zueinander ähnlich sind.

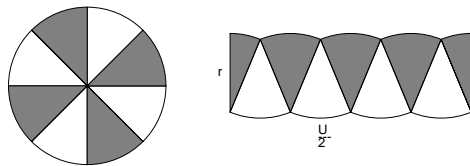
Zunächst ist keineswegs klar, dass die gleiche Zahl π sowohl in der Umfangsberechnung als auch in der Flächeninhaltsberechnung von Kreisen auftritt. Wegen der Ähnlichkeit aller Kreise gilt $\frac{U}{d}$ konstant und $\frac{A}{r^2}$ konstant. Genauso ist aber auch $\frac{A}{d^2}$

konstant. Es ist also keineswegs klar, dass $\frac{A}{r^2} = \pi$ ist oder diese Konstante überhaupt in einfacher Weis mit π zusammen hängt!

Um zu zeigen, dass $A = \pi r^2$ ist bzw. um die Berechnung des Flächeninhaltes direkt auf die Berechnung des Umfangs zurückzuführen, stellt man einen Zusammenhang von Umfang eines Kreises mit seinem Flächeninhalt her (nebenstehende Skizze).

Eine immer feinere Unterteilung des Kreises gibt den Zusammenhang $A = \frac{1}{2} U \cdot r = \frac{1}{2} \cdot 2\pi r \cdot r = \pi r^2$.

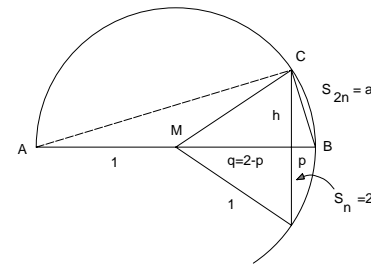
Dabei ist π die Konstante aus der Umfangsberechnung. Exakt ist hier wieder ein Grenzprozess durchzuführen.



Bestimmung von π durch ein Näherungsverfahren zur Berechnung des Kreisumfangs

Der Radius des Kreises soll 1 Längeneinheit (LE) betragen. Man berechnet, wie sich die Seitenlänge S_{2n} des eingeschriebenen regelmäßigen $2n$ -Ecks aus der Seitenlänge S_n des n -Ecks ergibt. Die Seitenlänge des eingeschriebenen 6-Ecks ist 1 LE. Damit kann man die Seitenlänge des 12-, 24, 48-Ecks berechnen. Diese Formeln können mit dem Taschenrechner oder mit Hilfe eines Tabellenkalkulationsprogramms ausgewertet werden, um immer genauere Werte für π zu erhalten.

Skizze



Es ist dann $U_n = n \cdot S_n$, $\pi \approx \frac{U_n}{2} = \frac{n}{2} S_n$

ΔABC ist rechtwinklig (Thalesatz)

Höhensatz für ΔABC : $h^2 = (2-p)p$ (1)

Kathetensatz für ΔABC : $a^2 = 2p$ (2)

(1) nach p (<1) aufgelöst: $p = 1 - \sqrt{1-h^2}$ (3)

(3) in (2) eingesetzt: $a = \sqrt{2 - 2\sqrt{1-h^2}}$
 $= \sqrt{2 - \sqrt{4-4h^2}}$

Damit ist

$$S_{2n} = \sqrt{2 - \sqrt{4 - S_n^2}} = \frac{S_n}{\sqrt{2 + \sqrt{4 - S_n^2}}}$$

Verwendet man in dieser Formel den 1. Term, dann erhält man zunächst immer bessere Annäherungen an π , ab dem 25. Schritt werden die Näherungen aber wieder schlechter und nach Schritt 27 liefert Excel sogar den Wert 0 für π . Der Grund liegt in einer „Subtraktionskatastrophe“ beim Runden. Der äquivalente (nachrechnen!) 2. Term ist dagegen „stabil“.

Die Tabelle:

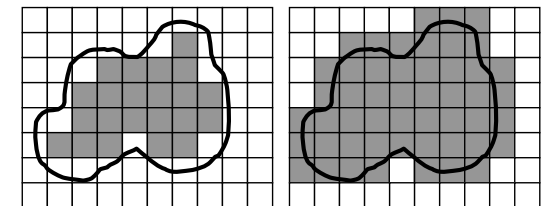
	A	B	C	D
1	n	S_n	U_n	$U_n/2$
2	6	1,000000	6,000000	3,000000
3	12	0,517638	6,211657	3,105829
4	24	0,261052	6,265257	3,132629
5	48	0,130806	6,278700	3,139350
6	96	0,065438	6,282064	3,141032
7	192	0,032723	6,282905	3,141452
8	384	0,016362	6,283115	3,141558
9	768	0,008181	6,283168	3,141584
10	1536	0,004091	6,283181	3,141590
11	3072	0,002045	6,283184	3,141592

Die eingegebenen Formeln (1. Term):

	A	B	C	D
1	n	S_n	U_n	$U_n/2$
2	6	1	$=(A^2 \cdot B^2)$	$=(C/2)$
3	$=(A^2 \cdot 2)$	$=(WURZEL(2-WURZEL(4-B^2 \cdot B^2)))$	$=(A^3 \cdot B^3)$	$=(C/3)$
4	$=(A^3 \cdot 2)$	$=(WURZEL(2-WURZEL(4-B^3 \cdot B^3)))$	$=(A^4 \cdot B^4)$	$=(C/4)$
5	$=(A^4 \cdot 2)$	$=(WURZEL(2-WURZEL(4-B^4 \cdot B^4)))$	$=(A^5 \cdot B^5)$	$=(C/5)$
6	$=(A^5 \cdot 2)$	$=(WURZEL(2-WURZEL(4-B^5 \cdot B^5)))$	$=(A^6 \cdot B^6)$	$=(C/6)$
7	$=(A^6 \cdot 2)$	$=(WURZEL(2-WURZEL(4-B^6 \cdot B^6)))$	$=(A^7 \cdot B^7)$	$=(C/7)$
8	$=(A^7 \cdot 2)$	$=(WURZEL(2-WURZEL(4-B^7 \cdot B^7)))$	$=(A^8 \cdot B^8)$	$=(C/8)$
9	$=(A^8 \cdot 2)$	$=(WURZEL(2-WURZEL(4-B^8 \cdot B^8)))$	$=(A^9 \cdot B^9)$	$=(C/9)$
10	$=(A^9 \cdot 2)$	$=(WURZEL(2-WURZEL(4-B^9 \cdot B^9)))$	$=(A^{10} \cdot B^{10})$	$=(C/10)$
11	$=(A^{10} \cdot 2)$	$=(WURZEL(2-WURZEL(4-B^{10} \cdot B^{10})))$	$=(A^{11} \cdot B^{11})$	$=(C/11)$

Allgemeines Verfahren zur Definition und Berechnung des Flächeninhaltes

Für beliebige Figuren F kann man den Flächeninhalt folgendermaßen definieren:



- Man legt über die Figur F ein Quadratgitternetz mit Maschenbreite $\frac{1}{n}$ und berechnet den Flächeninhalt I_n aller Quadrate, die ganz innerhalb der Figur liegen und den Flächeninhalt U_n aller Quadrate, die mindestens einen Punkt mit der Figur gemeinsam haben (die Figur überdecken).
- Die Folge I_n wächst und die Folge U_n fällt offensichtlich, wenn n immer größere Werte annimmt. Es ist stets $I_n \leq U_n$.

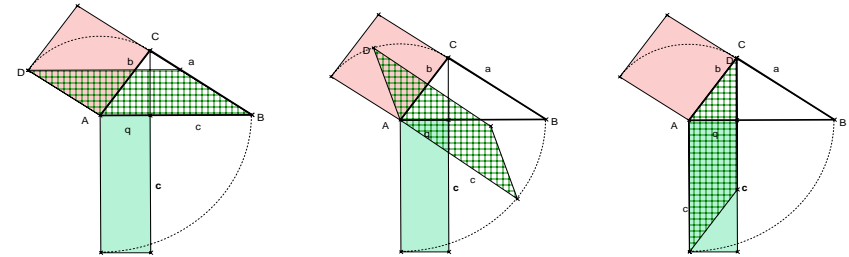
- Wenn I_n und U_n sich für $n \rightarrow \infty$ einer *gemeinsamen* Zahl A annähern, dann nennt man A den Flächeninhalt von F .
 I_n und U_n definieren A dann durch *Intervallschachtelung*.

Diese Idee einer allgemeinen Definition des Flächeninhalts kann noch verfeinert werden, um auch für sehr komplizierte Figuren einen Flächeninhalt zu erklären.

Die skizzierte Methode des Kästchen-Zählens zeigt auch, wie man für krummlinig begrenzte Figuren einen Näherungswert für den Flächeninhalt bestimmen kann.

7.3 Die Scherung – eine flächentreue Abbildung

Wir betrachten den durch die folgenden Abbildungen gegebenen Beweis zum Kathetensatz:



Mit Hilfe der Formel für den Flächeninhalt des Parallelogramms sieht man leicht, dass das Kathetenquadrat, das karierte Parallelogramm und das Rechteck aus Hypotenuse und Kathetenabschnitt flächengleich sind.

Aufgabe:

Führen Sie den Beweis exakt aus.

Dieser Beweis zum Kathetensatz legt die folgende Definition einer Abbildung der Ebene nahe:

Definition Scherung

Gegeben sind

- eine Gerade g , die Scherungsgerade,
- ein Winkel α mit $-90^\circ < \alpha < 90^\circ$, der Scherungswinkel.

Die Abbildungsvorschrift:

$$P \in g: \quad P' = P$$

$$P \notin g: \quad \angle(P', F_P, P) = \alpha, \text{ wobei } F_P \text{ der Fußpunkt des Lotes von } P \text{ auf } g \text{ ist.}$$

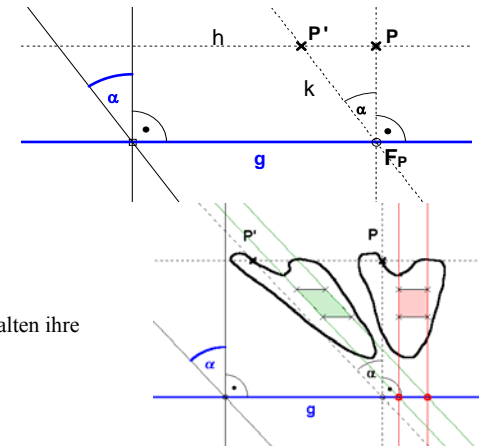
Konstruktion des Bildpunktes zu einem Punkt P :

Parallele h durch P zu g ,

Lot von P auf g mit Fußpunkt F_P ,

Gerade k unter dem Winkel α an $F_P P$ im Gegenuhrzeigersinn abtragen,

P' ist der Schnittpunkt von h und k .



Eigenschaften der Scherung:

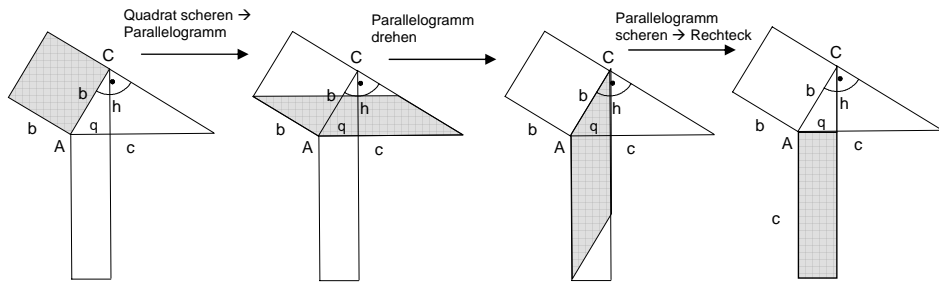
- Fixpunktgerade g ,
- Fixgeraden sind alle Parallelen zu g ,
- geradentreu,
- nicht längentreu, aber Strecken parallel zu g behalten ihre Länge,
- nicht winkeltreu,
- **flächentreu**.

Begründung der Flächeninhalte:

Der Flächeninhalt einer beliebigen Figur ergibt sich als Grenzwert von Quadraten mit immer kleineren Seitenlängen.

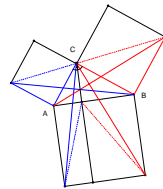
Diese Quadrate können so gewählt werden, dass 2 ihrer Seiten parallel zu g sind. Der Flächeninhalt solcher Quadrate bleibt bei der Scherung erhalten.

Die Tatsache, dass der Flächeninhalt bei Scherungen erhalten bleibt, macht man sich bei vielen Beweisen zu Nutze. Der Beweis des Kathetensatzes zu Beginn ist ein bekanntes Beispiel, bei dem zwei Scherungen und eine Drehung hinter einander ausgeführt werden.

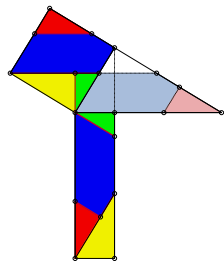


Aufgabe

Führen Sie den „Tänzerinnen-Beweis“ mit Hilfe von Scherungen durch.



Die folgende Skizze zeigt, wie man aus dem Scherungsbeweis für den Kathetensatz zusammen mit früheren Überlegungen einen Zerlegungsbeweis gewinnen kann, der sich wieder als „Puzzlebeweis“ umsetzen lässt.



7.4 Einige historische Bemerkungen

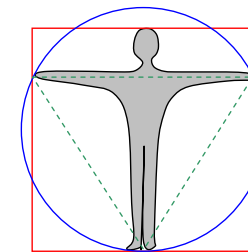
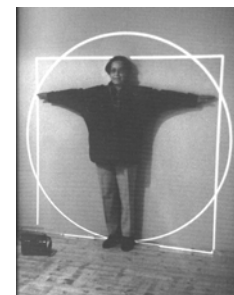
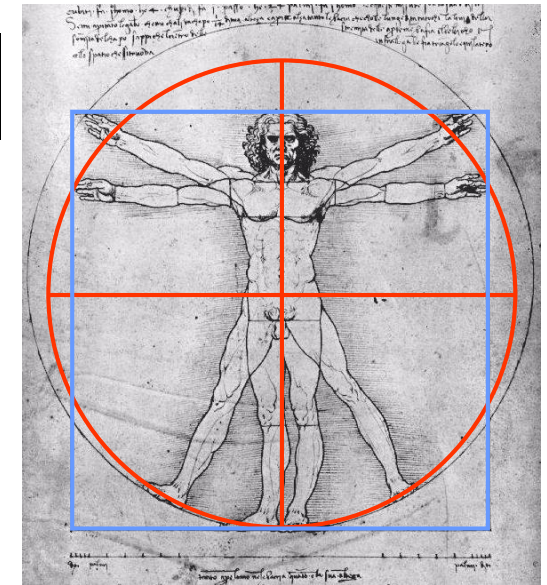
Quadratur des Kreises

Ein altes griechisches Problem

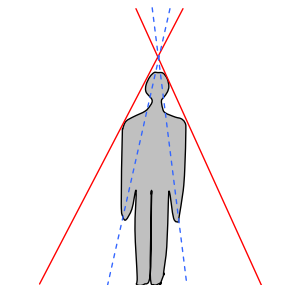
Gesucht ist ein Verfahren, nur mit **Zirkel und Lineal** zu einem Kreis mit gegebenem Radius ein **flächengleiches Quadrat** zu konstruieren.

Während es nicht allzu schwierig ist zu zeigen, dass man jedes Vieleck mit Zirkel und Lineal in ein flächengleiches Quadrat verwandeln kann, ist der Beweis für die Unmöglichkeit der „Quadratur des Kreises“ erst um 1870 gelungen (F.Lindemann).

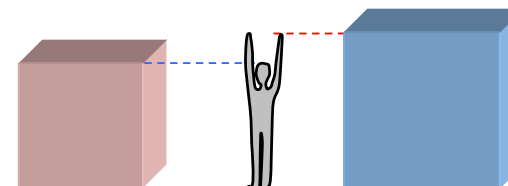
Auch Leonardo da Vinci hat sich mit diesem Problem befasst. Die nebenstehende Abbildung zeigt seine bekannte Studie zu den Längenverhältnissen am „idealen“ menschlichen Körper. Manche Autoren vermuten, dass Leonardo hier auch das Quadraturproblem implizit dargestellt hat: Der in Leonardos Darstellung fehlende Kreis durch die Fingerspitzen der waagrecht ausgestreckten Arme und durch den zentralen großen Zeh hat nahezu den gleichen Flächeninhalt wie das Quadrat, das durch die Körperhöhe und die Breite der ausgestreckten Arme bestimmt wird. Auf der ersten „Phänomene“ 1984 in Zürich wurde gar in einem Exponat von einem – wohl esoterischen – Autor die kühne Behauptung aufgestellt: Der Mensch ist die Lösung des Unlösbaren!



Quadratur des Kreises



Winkeldrittung



Würfelverdoppelung (Delisches Problem)

Flächeninhalt von Polygonen mit Zirkel und Lineal**Problem 1**

Kann man ein beliebiges Vieleck (Polygon) mit Zirkel und Lineal alleine umwandeln

- in flächeninhaltsgleiches Rechteck, dessen eine Seite eine Einheitsstrecke ist,
- in ein flächeninhaltsgleiches Quadrat?

Problem 2

Kann man diese Umwandlung auch alleine durch Zerschneiden und Zusammenlegen erreichen?

Kann man Teil 1 von Problem 1 lösen, dann ist Teil 2 sofort mit Hilfe des Kathetensatzes oder des Höhensatzes gelöst.

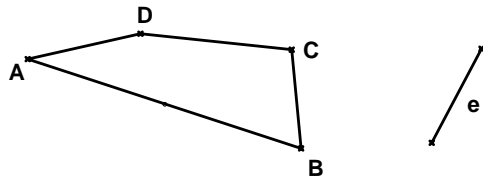
Werden diese Fragen positiv beantwortet, dann kann man alleine mit Hilfe von Zirkel und Lineal bzw. durch Zerschneiden den Flächeninhalt beliebiger Polygone vergleichen:

Entweder

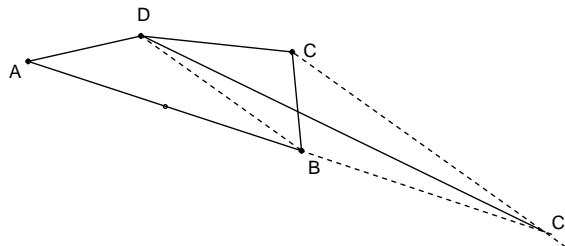
- man wandelt beide in Rechtecke mit einer Einheitsseite um und vergleicht deren andere Seitenlängen,
- oder man verwandelt beide in jeweils flächengleiche Quadrate und vergleicht diese Quadrate.

Aufgabe

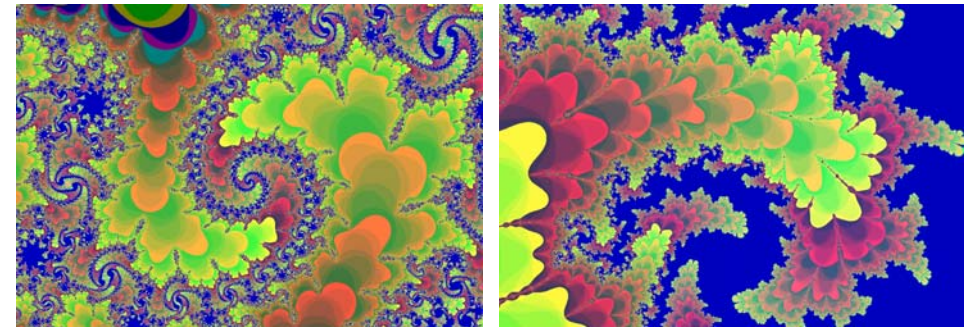
Wandeln sie das folgende Viereck in ein flächengleiches Rechteck mit der Strecke e als einer Seite um.



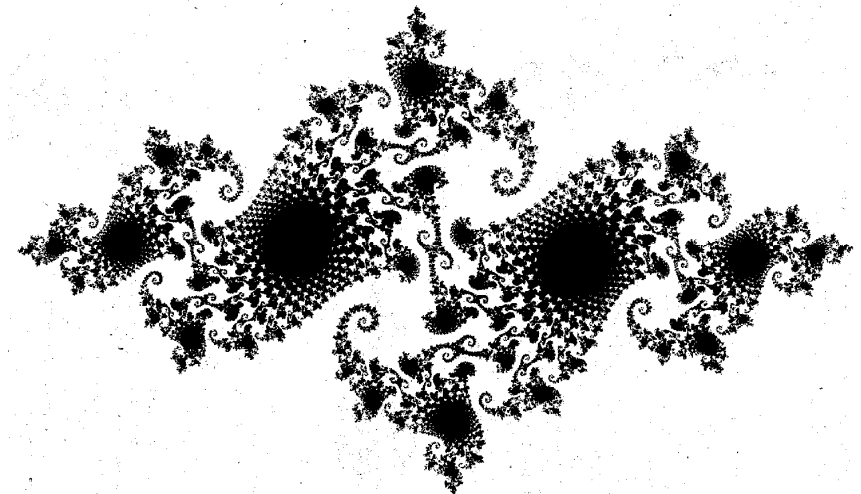
Idee (für beliebige n -Ecke anwendbar): Wandeln Sie das Viereck durch geeignete Scherung des Teildreiecks BCD in ein flächengleiches Dreieck $AC'D$ um („Wegscheren einer Ecke“). Das Dreieck kann dann in ein Parallelogramm und dieses in ein Rechteck mit gegebener Seite e flächengleich umgewandelt werden (Satz vom Ergänzungsparallelogramm S. 34)

**Problematische Figuren: Fraktale**

Ab Ende des 19. Jahrhunderts wurden in der Mathematik sehr komplizierte „Figuren“ konstruiert, bei denen der intuitive Flächeninhaltsbegriff nicht mehr ausreicht. Erst ab ca. 1980 konnte man gute Bilder solcher Figuren mit Computern herstellen. Für solche „zerrissenen“ Strukturen wurde von Benoit Mandelbrot⁵ der Begriff „Fraktale“ geprägt. Da sie ästhetisch ansprechend sind und wegen des Zusammenhangs mit der „Chaos-Theorie“ haben sie eine gewisse Bekanntheit auch außerhalb der Mathematik erreicht. Hier einige Beispiele so genannter „Julia-Mengen“



Wie sollte hier der Flächeninhalt der blauen Flächen definiert werden?



Hat die schwarze Menge von Punkten einen Flächeninhalt? Wie könnte er definiert werden?

⁵ B.Mandelbrot, The fractal Geometry of Nature, Freeman New York 1977

8 Literatur

- KIRSCHKE, PETER, Einführung in die Abbildungsgeometrie
Kongruenzabbildungen und Ähnlichkeiten (Mathematik-ABC für das Lehramt)
Teubner, Stuttgart 1998
Am besten für die Vorlesung geeignet.
- KRATZ, JOHANNES, Zentrale Themen des Mathematikunterrichts aus didaktischer Sicht
Bayerischer Schulbuch-Verlag, München 1993
Gute Einführung in die Elementargeometrie, Fachhintergrund und Fachdidaktik für die Geometrie der SI, im Wesentlichen für gymnasiales Niveau. Deckt die Inhalte der Vorlesung gut ab, wenn auch der Zugang etwas verschieden von dem hier gegebenen ist.
- MITSCHKA, A.; STREHL, R.; HOLLMANN, E., Einführung in die Geometrie
Grundlagen, Kongruenz- und Ähnlichkeitsabbildungen.
Franzbecker, Hildesheim 1998
Für Vorlesungen für Lehramtsstudenten, gut zum Nachlesen, etwas alt, nicht immer ganz einfach.
- SCHEID, HARALD, Elemente der Geometrie
BI-Wiss.-Verl., Mannheim 1991
Für Vorlesungen für Lehramtsstudenten. Sehr umfangreich, tiefer gehend, gut zum Nachschlagen.
- STEIN, MARTIN, Geometrie (Mathematik Primarstufe)
Spektrum, Akad. Verl., Heidelberg 1999
Für Vorlesungen für Grundschullehrer geschrieben, aber weicht stark von unserem Zugang ab.
Für unsere Vorlesung: Ornamente und Parkette; Sätze über Dreiecke, Vierecke und Kreise.
Darüber hinaus eine axiomatische Entwicklung der euklidischen Geometrie.
- WITTMANN, ERICH, Elementargeometrie und Wirklichkeit
Vieweg, Braunschweig 1987
Sehr umfassend. Viele interessante geometrische Sachverhalte, sehr gut zum Nachschlagen.
Anspruchsvoll aber gut verständlich
- DIFF- HEFT Elementargeometrie
DIFF Tübingen 1974
Sehr alt, gibt sorgfältige, korrekte aber sehr abstrakte Einführung in ein Axiomensystem für die Geometrie.
Hat man früher von Lehrern der SI verlangt!
Wer's genau wissen will, kann hier nachlesen.
- MITSCHKA, ARNO, Didaktik der Geometrie in der Sekundarstufe I
Herder, Freiburg 1982
Didaktik der Geometrie, aber sehr alt und daher streckenweise sehr formal !!!
- Weiterführende Literatur zur Geometriedidaktik**
- MAMMANA, C., VILLANI, V., Perspectives on the Teaching of Geometry for the 21st Century
Kluwer, Dordrecht 1998
Sammlung grundlegender internationaler Artikel über Geometriedidaktik.
- WEIGAND, H.-G., WETH, TH., Computer im Mathematikunterricht
Spektrum, Akad. Verl., Heidelberg 2002
Kapitel über Geometrie (S.155-228), im Wesentlichen über den Einsatz von DGS im Unterricht.

- GRAUMANN, G., HÖLZL, R., KRAINER, K., NEUBRAND, M., STRUVE, H., Tendenzen der Geometriedidaktik der letzten 20 Jahre
Journal für Mathematik-Didaktik 17, 163-273, 1996
Überblick über die Entwicklung der Geometriedidaktik bis 1996.

Geometrievorlesungen im Internet

- RINKENS, H.D., Elemente der Geometrie
<http://math-www.uni-paderborn.de/~rinkens/veranst/elgeo2001/index.html>
Gut verständlich, Inhalte vergleichbar mit denen unserer Vorlesung.
- Elemente der Geometrie (Hauptschule) - SS 2000
http://www.didmath.ewf.uni-erlangen.de/Vorlesungen/Geometrie_HS/Geo_2000/index2.htm
Lehrstuhl für Didaktik der Mathematik, Universität Erlangen-Nürnberg
Gut verständlich, dynamische Figuren in der Darstellung, Inhalte vergleichbar mit denen unserer Vorlesung (z.B. Ortslinien, Satzgruppe des Pythagoras)