Kapitel 4: Ähnlichkeitsabbildungen

Beispiele

„Verkleinerungen“

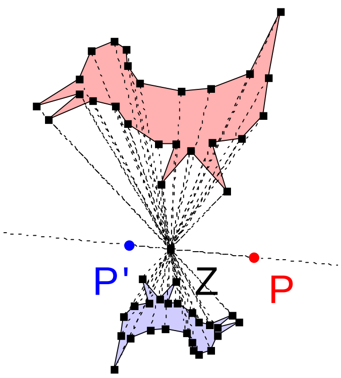
„Vergrößerungen“

Bijektive, geradentreue und winkeltreue Abbildungen der Ebene heißen **Ähnlichkeitsabbildungen**.

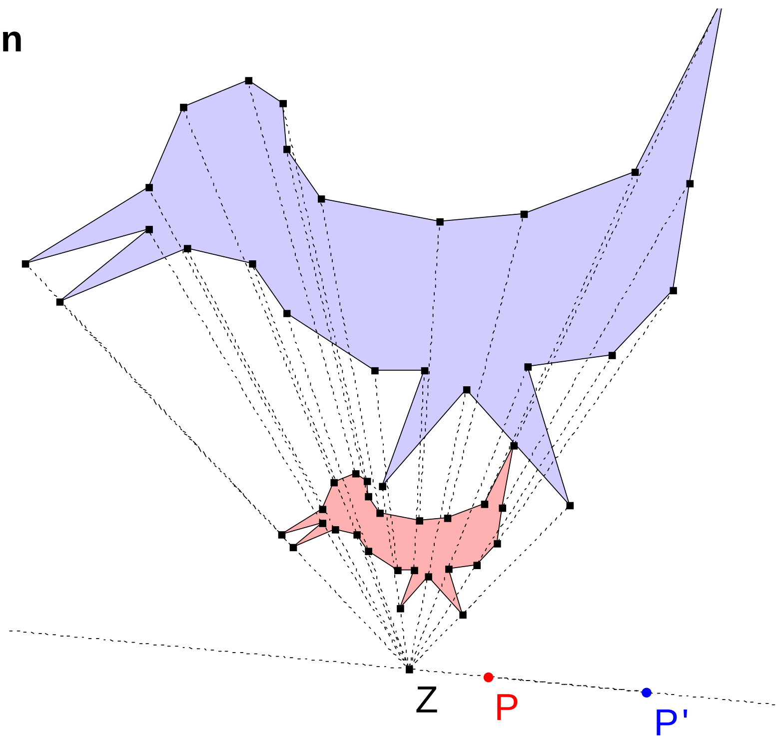
Mathematische **Präzisierung,** aber auch **Verengung** der umgangssprachlichen Redeweise

„Die zwei sehen ganz ähnlich aus“

4.1 Zentrische Streckungen



$k = -0{,}5$



$k = +3$

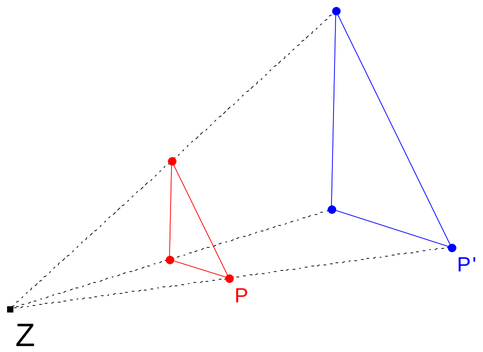
Definition 4.1

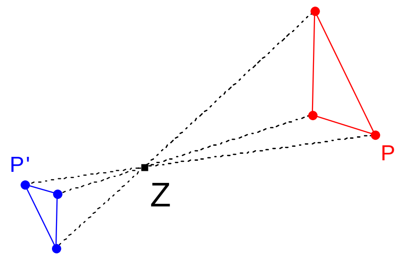
Es sei Z ein Punkt der Ebene E; k $\in \mathbb{R} \setminus \{0\}$.

Eine Abbildung E→E heißt zentrische Streckung mit (Streck-)Zentrum Z und Streckfaktor k

⇔ für jeden Punkt P und seinen Bildpunkt P‘ gilt: $\overrightarrow{ZP'} = k \cdot \overrightarrow{ZP}$

Beispiel: Strecken von Dreiecken





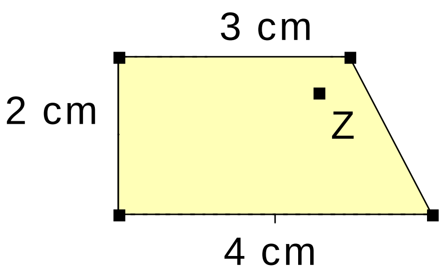
k = +2 $\quad \overline{ZP'} = 2 \cdot \overline{ZP}$

k = -0,5 $\quad \overline{ZP'} = \frac{1}{2} \cdot \overline{ZP}$

Aufgabe

Führen Sie mit dem Viereck je eine zentrische Streckung durch mit

a) k = 2 b) k= - 3 c) k= -1



Was bedeutet Streckung mit k=-1 ?

Wie lässt sich die Streckung mit k=-3 deuten?

Was würde eine Streckung mit Faktor k=0 bedeuten?

Eigenschaften einer zentrischen Streckung

- Umkehrabbildung ist die zentrische Streckung mit demselben Zentrum und dem Streckfaktor 1/k.
- Fixelemente einer zentrischen Streckung:
  - Fixpunkt: Z
  - Fixgeraden: alle Geraden durch Z

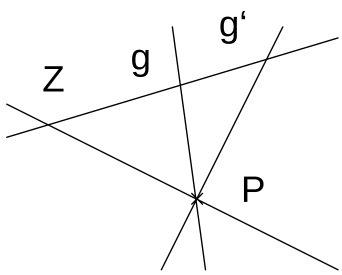
Invarianten einer zentrischen Streckung

- Geradentreu (Beweis ausgelassen)
- Bildgerade || Originalgerade
- parallelentreu
- winkelmaßtreu
- umlaufsinntreu
- teilverhältnistreu
- längenverhältnistreu
- Im allgemeinen ***nicht flächeninhaltstreu***

Einige Beweise

Bildgerade || Originalgerade:
$Z \in g$: $\Rightarrow$ g'=g und g' || g.

$Z \notin g$ aber $g' \cap g = \{P\}$: $\Rightarrow$ P Fixpunkt $\neq Z$.
Also auch hier g' || g.



Parallelentreue, Winkelmaßtreue:
Folgen aus der vorangehenden Eigenschaft.

Umlaufsinntreue: Offensichtlich

Teilverhältnistreue: Satz 4.3 oder Folgerung aus Satz 4.1.

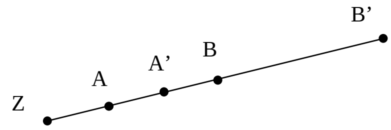
Längenverhältnistreue: Folgerung aus Satz 4.1.

Was wir schon immer geglaubt haben:

Ist das nicht genau die Definition einer zentrischen Streckung???

Satz 4.1
Bei einer zentrischen Streckung mit Faktor k gilt für *jede* Strecke $\overline{AB}$:
$|\ \overline{A'B'}\ | = |k| \cdot |\overline{AB}\ |$

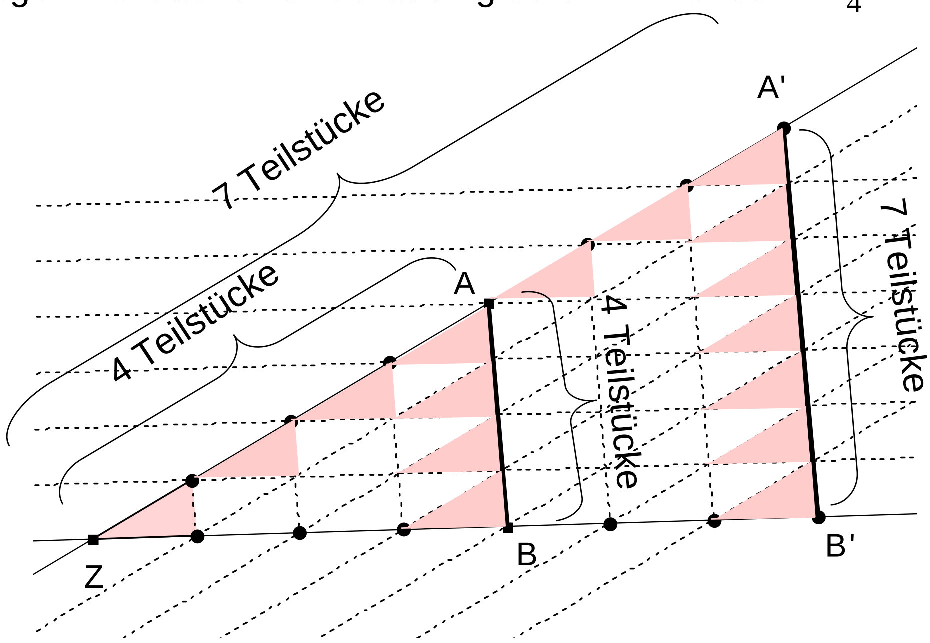
Beweis



1.Fall: A,B liegen auf einer Geraden g durch Z

$$|\overline{A'B'}| = |\overline{ZB'}| - |\overline{ZA'}| = k\,|\overline{ZB}| - k\,|\overline{ZA}| = k(|\overline{ZB}| - |\overline{ZA}|) = k\,|\overline{AB}|$$

2.Fall:
A,B liegen nicht auf einer Geraden g durch Z. Hier sei k= $\frac{7}{4}$



Aufgabe

Eine **zentrische Streckung** wird festgelegt durch Angabe des **Streckzentrums Z** und des **Streckfaktors k**.

Kann eine zentrische Streckung auch auf andere Art eindeutig festgelegt werden?

f sei eine zentrische Streckung .

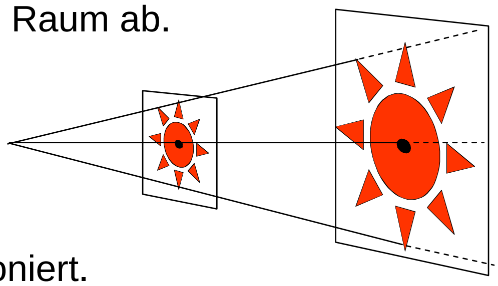
Prüfen Sie, was zutrifft und begründen oder widerlegen Sie.

f wird eindeutig festgelegt durch

- Ein Punktepaar (P,P‘), $P \neq P'$,
- Zentrum Z und ein Punktepaar (P,P‘), $P \neq P'$,
- zwei Punktepaare (P,P‘) , (Q,Q‘) , $P \neq Q$,
- drei Punktepaare (P,P‘) , (Q,Q‘) , (R,R‘), P, Q, R nicht auf einer Geraden.

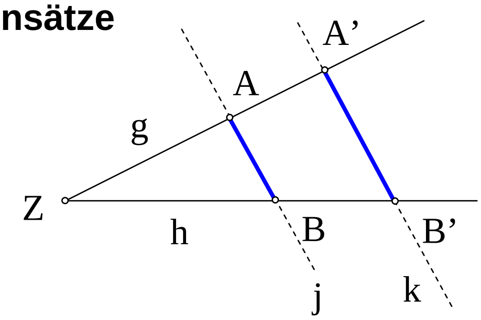
Aufgabe

In der Schule wird zur Einführung der zentrischen Streckung oft das Beispiel eines **Projektors** zur Vergrößerung von Bildern herangezogen. Der Vergrößerungsprozess spielt sich im Raum ab.



- Erklären sie, wie dieser Prozess funktioniert.
- Erklären sie, wie man daraus eine zentrische Streckung in der Ebene erhält.
  Wie kommt man zur Abbildungsvorschrift in der Ebene?
- Welche Arten von zentrischen Streckungen ergeben sich dabei?
- Kennen Sie andere Vorrichtungen im Raum, bei denen solche Vergrößerungen/Verkleinerungen eine Rolle spielen?

4.2 Strahlensätze



$g \cap h = \{Z\}$
$g \cap j = \{A\}$; $g \cap k = \{A'\}$;
$h \cap j = \{B\}$, $h \cap k = \{B'\}$

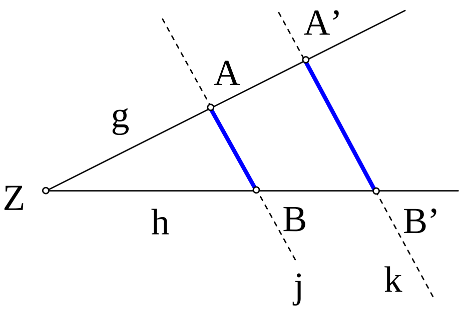
Satz 4.2
1.Strahlensatz:

Ist j || k, so ist $\frac{|\overline{ZA'}|}{|\overline{ZA}|} = \frac{|\overline{ZB'}|}{|\overline{ZB}|}$ und $\frac{|\overline{ZA}|}{|\overline{AA'}|} = \frac{|\overline{ZB}|}{|\overline{BB'}|}$.

Umkehrung des 1. Strahlensatzes:

Ist $\frac{|\overline{ZA'}|}{|\overline{ZA}|} = \frac{|\overline{ZB'}|}{|\overline{ZB}|}$ oder $\frac{|\overline{ZA}|}{|\overline{AA'}|} = \frac{|\overline{ZB}|}{|\overline{BB'}|}$, so ist j || k .

Beweis Strahlensatz



Durch $k = \frac{|\overline{ZA'}|}{|\overline{ZA}|}$ wird eine zentrische Streckung definiert.

Das Bild von B unter dieser Streckung sei B~.
Dann ist A‘B~ || AB.

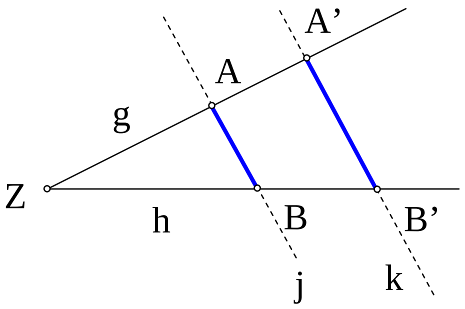
Aus A‘B‘ || AB folgt A‘B‘ || A‘B~ , also

B‘=B~ und damit auch $k = \frac{|\overline{ZB'}|}{|\overline{ZB}|}$

Beweis Umkehrung

$$\frac{|\overline{ZA'}|}{|\overline{ZA}|} = \frac{|\overline{ZB'}|}{|\overline{ZB}|} = k$$

$\Rightarrow$ A und B werden durch zentrische Streckung mit Faktor k auf A‘ und B‘ abgebildet.
$\Rightarrow$ AB || A‘B‘.

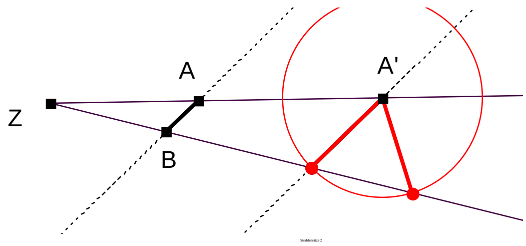


$g \cap h = \{Z\}$
$g \cap j = \{A\}$; $g \cap k = \{A'\}$;
$h \cap j = \{B\}$, $h \cap k = \{B'\}$

Satz 4.2
2.Strahlensatz:

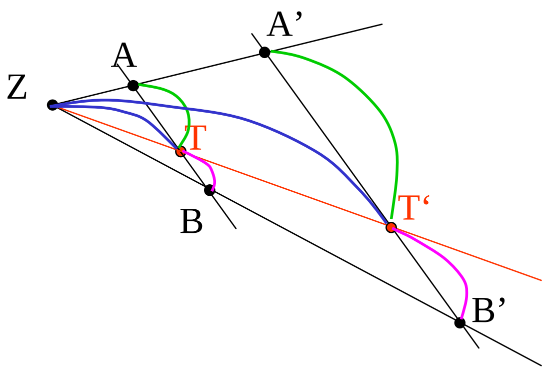
Ist j || k, so ist $\frac{|\overline{ZA'}|}{|\overline{ZA}|} = \frac{|\overline{A'B'}|}{|\overline{AB}|}$.

Der 2. Strahlensatz ist nicht umkehrbar!



Teilverhältnistreue

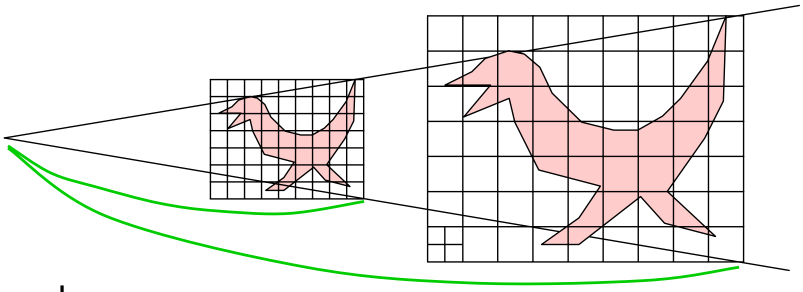
Satz 4.3
Drei Punkte A,B,T einer Geraden g werden durch zentrische Streckung auf die Punkte A',B',T' der Geraden g' abgebildet. Dann gilt:
Ist | $\overline{AT}$ | = r·| $\overline{TB}$ |, so ist auch | $\overline{A'T'}$ | = r·| $\overline{T'B'}$ | .



$$\frac{|\overline{A'T'}|}{|\overline{AT}|} = \frac{|\overline{ZT'}|}{|\overline{ZT}|} = \frac{|\overline{T'B'}|}{|\overline{TB}|} \quad \Rightarrow \quad \frac{|\overline{A'T'}|}{|\overline{T'B'}|} = \frac{|\overline{AT}|}{|\overline{TB}|} = r$$

4.3 Flächeninhalt und Volumen bei zentrischer Streckung

Satz 4.4
Bei einer zentrischen Streckung mit dem Faktor k wird
- jede Fläche auf eine Fläche mit k^2 fachem Inhalt abgebildet,
- jeder Körper auf einen Körper mit k^3 fachem Volumen abgebildet.



$k \approx 2$

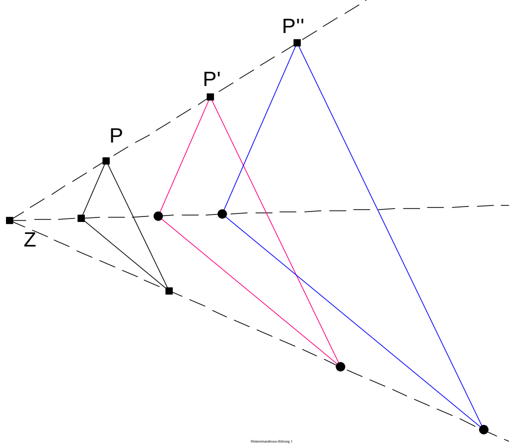
Anwendung
Massiver Körper auf das k-fache vergrößert:
Volumen und Gewicht nehmen auf das k^3-fache zu.

Bei massiver Gipsfigur Höhe verdoppelt „ohne die Form zu ändern“ :
Gewicht nimmt auf das 8-fache zu.

4.4 Hintereinanderausführen von zentrischen Streckungen

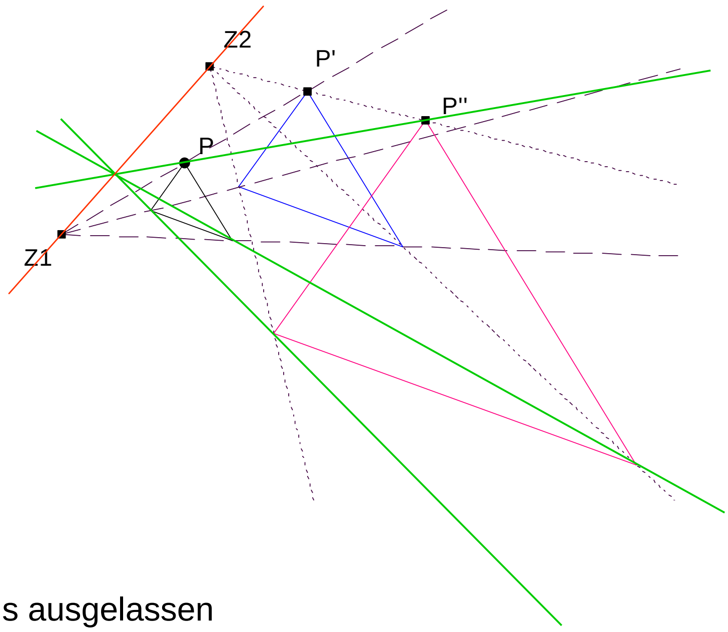
(a) Gleiches Streckzentrum

Satz 4.5 (a)
Das Hintereinanderausführen von zwei zentrischen Streckungen mit gemeinsamem Streckzentrum Z und den Streckfaktoren k_1 und k_2 lässt sich ersetzen durch eine zentrische Streckung mit Streckzentrum Z, Streckfaktor $k_1 \cdot k_2$.



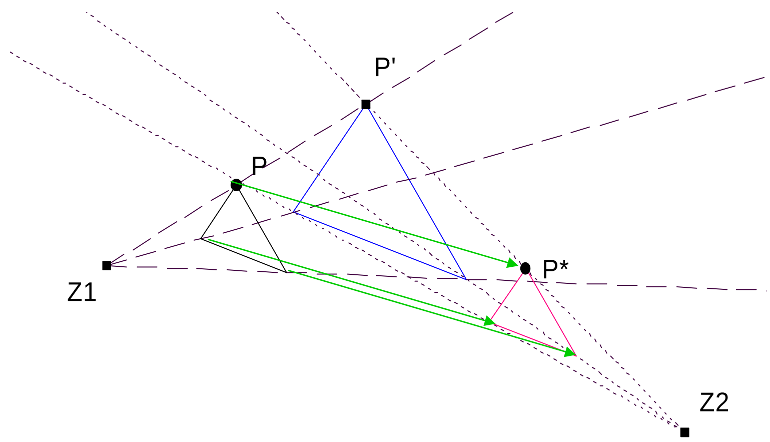
(b) Verschiedene Streckzentren

Fall 1: $k_1 \cdot k_2 \neq 1$



Exakter Beweis ausgelassen

Fall 2: $k_1 \cdot k_2 = 1$



Satz 4.5 (b)
Das Hintereinanderausführen von zwei zentrischen Streckungen mit verschiedenen Streckzentren und den Streckfaktoren k_1 und k_2 lässt sich ersetzen

- durch eine **zentrische Streckung**, falls $\mathbf{k_1 \cdot k_2 \neq 1}$,(Zentrum auf Z_1Z_2)
- durch eine **Verschiebung**, falls $\mathbf{k_1 \cdot k_2 = 1}$ (Verschiebung || Z_1Z_2)

4.5 Ähnlichkeitsabbildungen

Definition 4.2
Eine Abbildung f: E→E heißt Ähnlichkeitsabbildung
⇔ f ist bijektiv, geradentreu und winkeltreu

Wie kann man Ähnlichkeitsabbildungen charakterisieren?

Satz 4.6
Jede Ähnlichkeitsabbildung kann man als Verkettung einer zentrischen Streckung mit einer Kongruenzabbildung darstellen.

Beweisidee:

Begründe zuerst wieder, dass bijektive, geradentreue und winkeltreue Abbildungen durch die Abbildung eines Dreiecks eindeutig festgelegt sind.

4.6 Die Gruppe (Ä, ∘) aller Ähnlichkeitsabbildungen der Ebene

Ä = Menge aller Ähnlichkeitsabbildungen E → E;
∘ = „Hintereinanderausführung“

Satz 4.7
(Ä, ∘) ist eine (unendliche) Gruppe.
(K, ∘) ist eine Untergruppe von (Ä, ∘).

Beweis
- **Ä** ist **abgeschlossen** unter **o**
- **Assoziativgesetz** gilt $(f \circ g) \circ h = f \circ (g \circ h)$
- „id“ (die identische Abbildung) ist **neutrales** Element; id ∈ **Ä**
- mit jedem f ∈ **Ä** ist auch das **inverse** Element f^{-1} ∈ **Ä**