

# Kapitel 2: Kongruenzabbildungen

## 2.1 Geradenspiegelungen

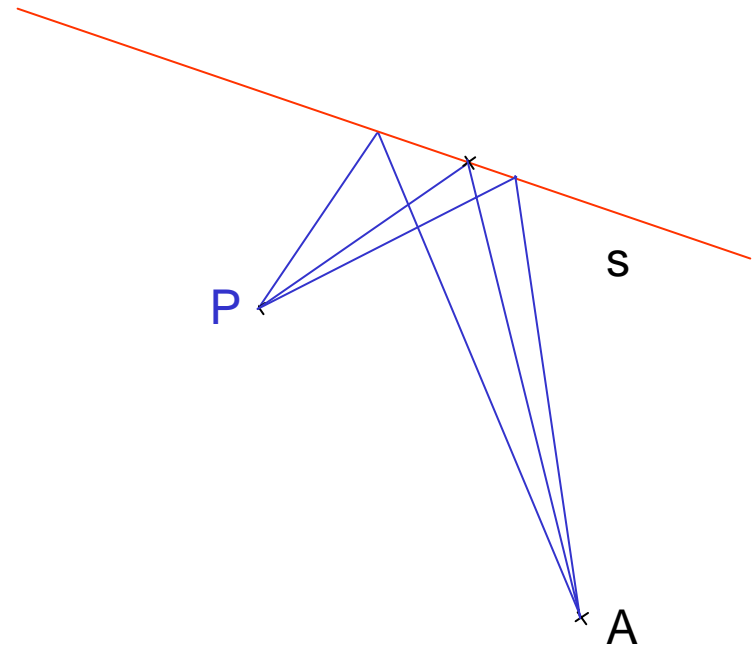
### a) Spiegel

Wie wirkt ein Spiegel?

Modellvorstellung:

Jeder beleuchtete Punkt P sendet nach allen Seiten Lichtstrahlen aus

Wie verlaufen die Lichtstrahlen von P über S nach A?



Fermat-Prinzip (Pierre de Fermat 1601 – 1665):

**Licht wählt unter allen möglichen Wegen den kürzesten**  
(im Allgemeinen: den schnellsten)

Was ist der kürzeste Weg von P über S nach A?

# Begründung des Reflexionsgesetzes mit dem Fermat-Prinzip

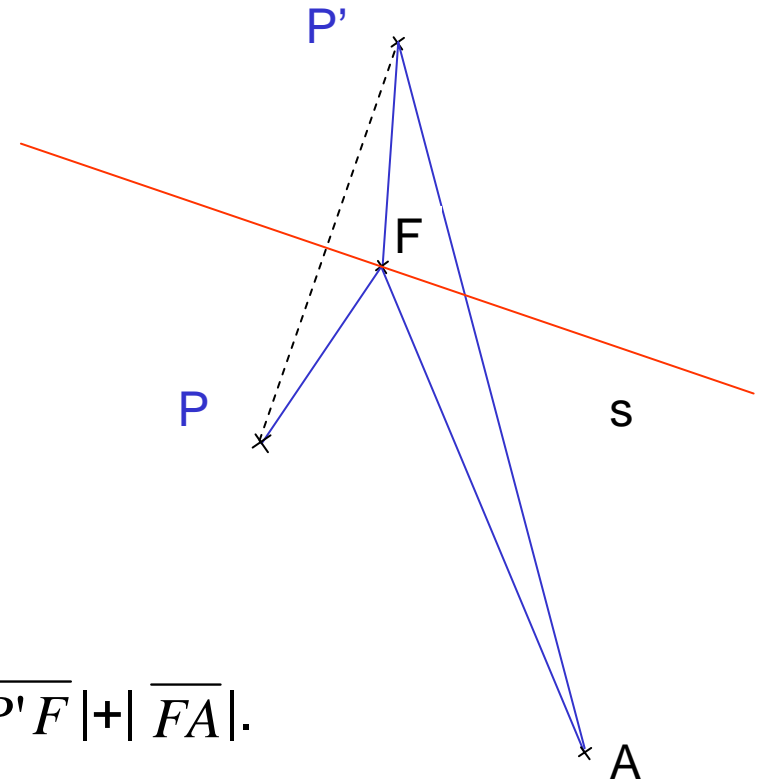
Von P aus läuft ein Lichtstrahl zum Punkt F auf der Spiegelfläche und von dort zu Punkt A. F ist so zu bestimmen, dass der gesamte Weglänge  $|\overline{PF}| + |\overline{FA}|$  möglichst kurz wird.

Definiere P' so, dass s die Mittelsenkrechte zu  $\overline{PP'}$  ist.

- $|\overline{PF}| = |\overline{P'F}|$
- gesamte Weglänge  $|\overline{PF}| + |\overline{FA}| = |\overline{P'F}| + |\overline{FA}|$ .

Weglänge minimal: F liegt auf  $\overline{P'A}$ .

Sonst:  $|\overline{P'F}| + |\overline{FA}| > |\overline{P'A}|$ .

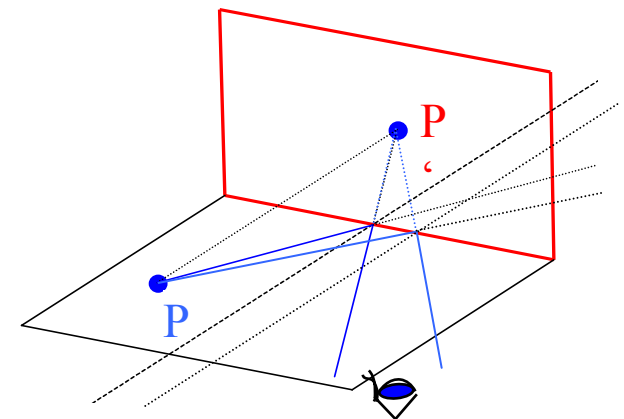
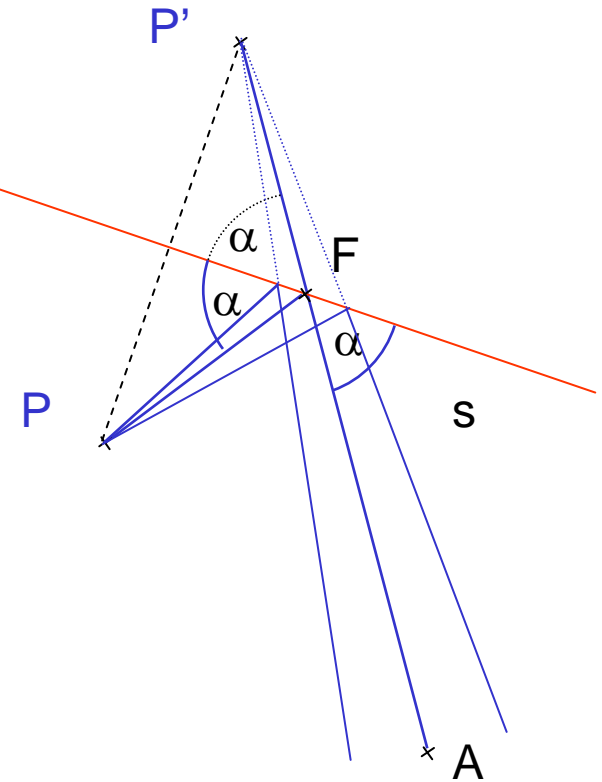


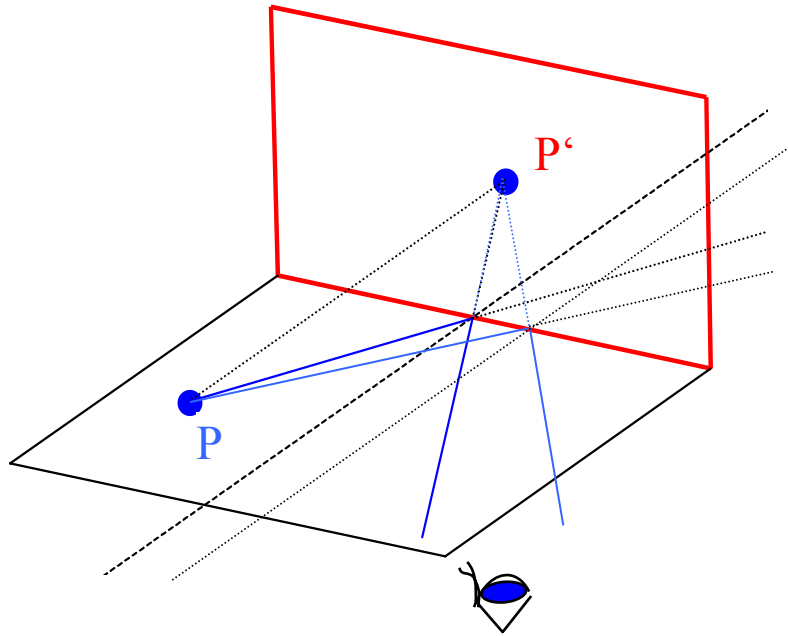
## Reflexionsgesetz

- Einfallender Strahl, Lot und reflektierter Strahl liegen in einer Ebene (Einfallsebene) senkrecht zur Spiegelebene
- Einfallswinkel und Reflexionswinkel sind gleich.

Betrachte weitere Strahlen, die von P ausgehen.

Die reflektierten Strahlen *scheinen* alle von einem Punkt P' herzukommen, der auf der anderen Seite des Spiegels auf dem Lot durch P im gleichen Abstand wie P liegt.





Das Auge nimmt den Punkt  $P'$  als Quelle der Strahlen wahr.

Untersuchung des Strahlengangs:  
Beschränkung auf die Einfallsebene

Spiegel***ebene***  $\Rightarrow$  Spiegel***achse***

*Räumliche Spiegelung*  $\Rightarrow$  *Geradenspiegelung*

## b) Geradenspiegelungen

### Definition 2.1

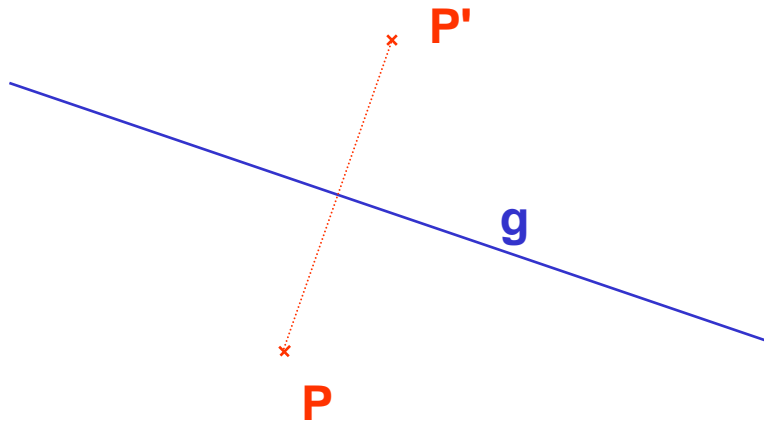
Es sei  $g$  eine Gerade der Ebene  $E$ .

Eine Abb.  $S_g : E \rightarrow E$  heißt Geradenspiegelung (Achsenspiegelung)

$\Leftrightarrow$  für jeden Punkt  $P$  und seinen Bildpunkt  $P'$  gilt:

Ist  $P \notin g$ , so ist  $g$  die Mittelsenkrechte von  $PP'$

Ist  $P \in g$ , so ist  $P' = P$ .



Handelndes Durchführen von Geradenspiegelungen:

- Falten und Klecksen; Falten und Schneiden; Falten und Kohlepapier; Falten und Durchstechen
- kariertes Papier

## Eigenschaften einer Geradenspiegelung $S_g$ :

Die Umkehrabbildung einer Geradenspiegelung  $S_g$  ist die selbe Geradenspiegelung  $S_g$ :  $\mathbf{S}_g^{-1} = \mathbf{S}_g$

1 Punktepaar  $(P, P')$  ( $P \neq P'$ ) legt die Abbildung eindeutig fest.

Zu zwei verschiedenen Punkten  $P, Q$  gibt es genau eine Achsenspiegelung  $S_g$  mit  $S_g(P)=Q$ .

**Fixelemente** von  $S_g$ :

**Fixpunkte:** alle Punkte von  $g$

**Fixpunktgerade:**  $g$

**Fixgeraden:**  $g$ ; alle Senkrechten zu  $g$

**Invarianten:**

geradentreu

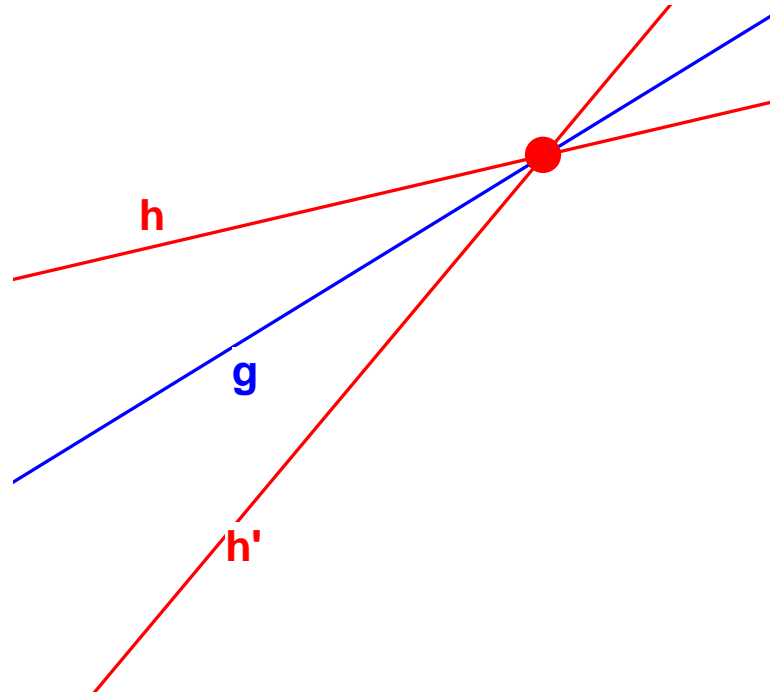
längentreu

winkelmaßtreu

flächeninhaltenstreu

***nicht*** *umlaufsinntreu*

Weitere, hieraus und aus der Definition beweisbare Eigenschaften einer Geradenspiegelung  $S_g$

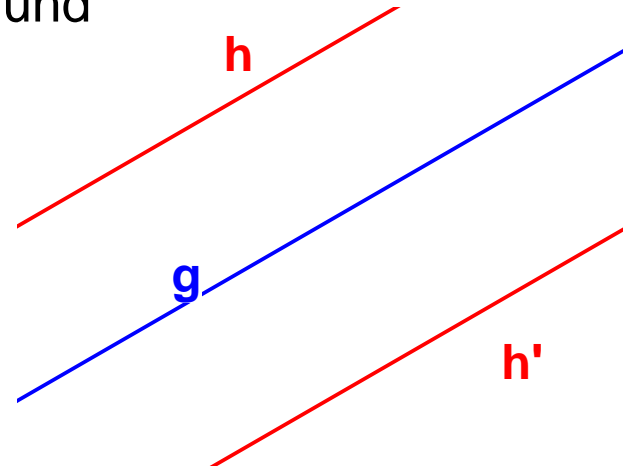


Ist nicht  $h \parallel g$ , so schneiden sich  $h$  und  $h'$  auf  $g$ .

$g$  halbiert den Winkel zwischen  $h$  und  $h'$ .

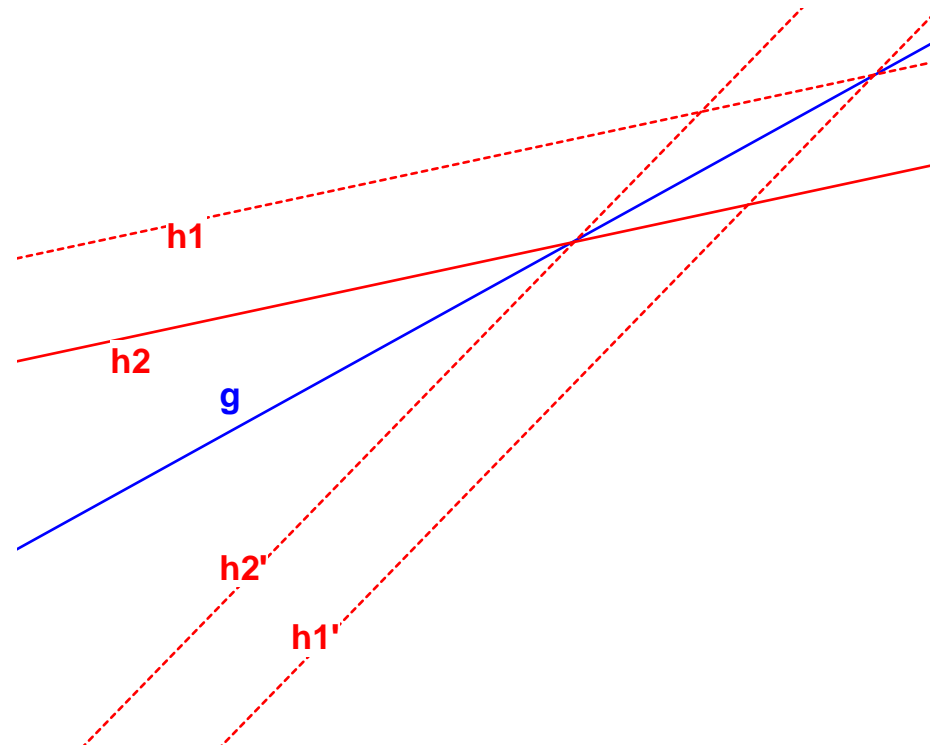
Ist  $h \parallel g$ , so ist  $g$  Mittelparallele des von  $h$  und  $h'$  begrenzten Parallelstreifens .

Beweis  $\rightarrow$  Übung



Ist  $h_1 \parallel h_2$  , so ist auch  $h_1' \parallel h_2'$   
„**parallelerentreu**“

Beweis  $\rightarrow$  Übung





## 2.2 Definition und Eigenschaften von Kongruenzabbildungen

### Definition 2.2

Eine Abbildung  $f: E \rightarrow E$  heißt Kongruenzabbildung  
 $\Leftrightarrow$   $f$  ist bijektiv, geradentreu, längentreu.

### Satz 2.1

Jede Geradenspiegelung ist eine Kongruenzabbildung.

### Satz 2.2

Die Verkettung von zwei Geradenspiegelungen ist eine Kongruenzabbildung.

**Folgende Probleme im Zusammenhang mit Kongruenzabbildungen sollen behandelt werden:**

**Gibt es außer den Achsenspiegelungen noch weitere Kongruenzabbildungen?**

**Welche Typen können das sein? Kann man sie einfach klassifizieren?**

**Welche Typen von Kongruenzabbildungen erhält man, wenn man mehrere Achsenspiegelungen hintereinander ausführt?**

Bevor wir uns mit der Verkettung von Achsenspiegelungen im Einzelnen befassen, sollen noch einige Eigenschaften von Kongruenzabbildungen bewiesen werden.

Wir verwenden wiederum alle in Kapitel 1.6 aufgeführten „Axiome“.

### **Satz 2.3**

Die Verkettung von zwei Kongruenzabbildung ist eine Kongruenzabbildung.

Beweis:

Unmittelbare Folge aus der Definition.

## Satz 2.4

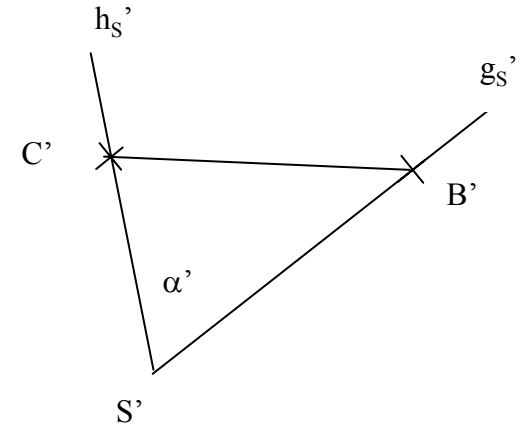
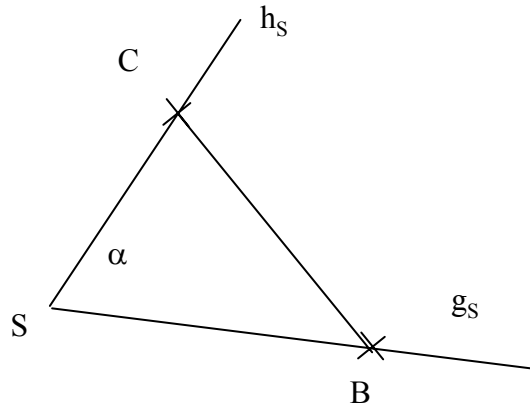
Jede Kongruenzabbildung ist winkelmaßtreu und flächeninhaltstreu.

### Winkeltreue

Winkel  $\alpha$  sei  $\angle g_S, h_S$

Bildwinkel  $\alpha'$  sei  $\angle g_{S'}, h_{S'}$ .

Wähle Punkt B auf  $g_S$   
und Punkt C auf  $h_S$ .



Wegen der Längentreue der Kongruenzabbildungen:

Für das Bilddreieck  $S'B'C'$  ist  $\overline{SB} = \overline{S'B'}$  ,  $\overline{BC} = \overline{B'C'}$  ,  $\overline{CS} = \overline{C'S'}$

Damit stimmen die Dreiecke auch in allen Winkeln überein, also ist  $\alpha' = \alpha$ .

## Flächeninhaltstreue

Vorgriff auf die späteren Ausführungen zum Flächeninhaltsbegriff:

Der Flächeninhalt von Rechtecken bleibt erhalten.

**Rechteck  $ABCD \Rightarrow$  Rechteck  $A'B'C'D'$**

da Kongruenzabbildungen **winkeltreu** sind.

**Seitenlängen Bildrechteck  $A'B'C'D'$  =  
Seitenlängen Rechteck  $ABCD$**

da Kongruenzabbildungen **längentreu** sind.

**$\Rightarrow$  Flächeninhalte bleiben gleich, da der Flächeninhalt beliebiger Figuren (z.B. von Ellipsen) als Grenzwert geeigneter Folgen von Quadraten definiert wird.**

## **Satz 2.5**

Jede Kongruenzabbildung ist parallelelentreu.

Beweis:

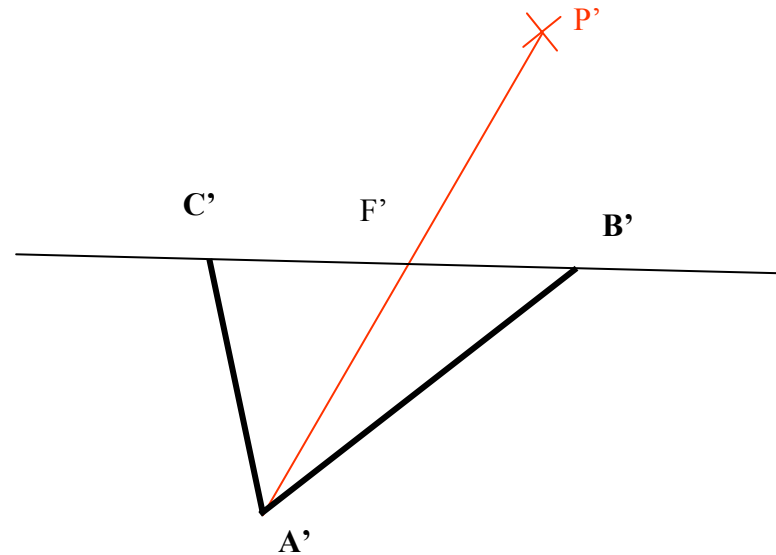
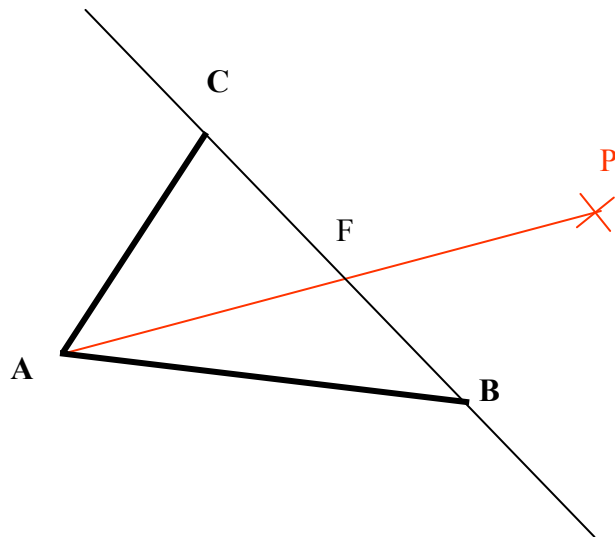
Folgt unmittelbar aus der Geradentreue und der Bijektivität von Kongruenzabbildungen (Übungsaufgabe).

## Satz 2.6

Durch das Abbilden eines einzigen Dreiecks ist eine Kongruenzabbildung eindeutig festgelegt.

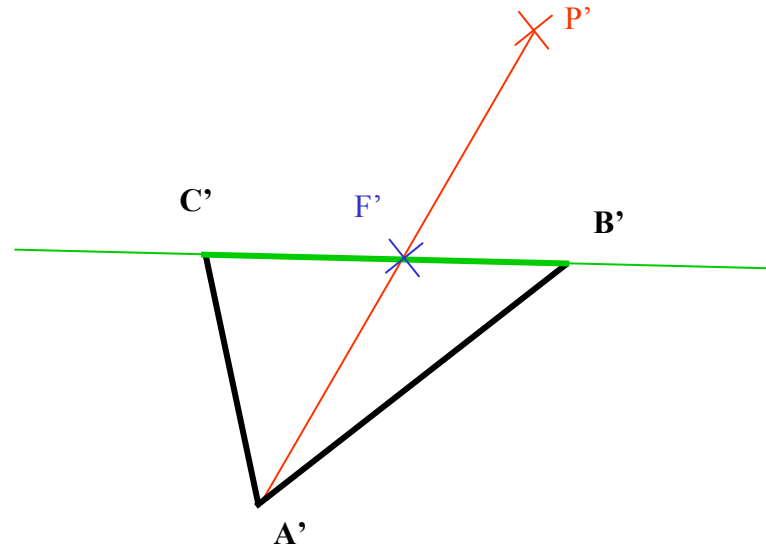
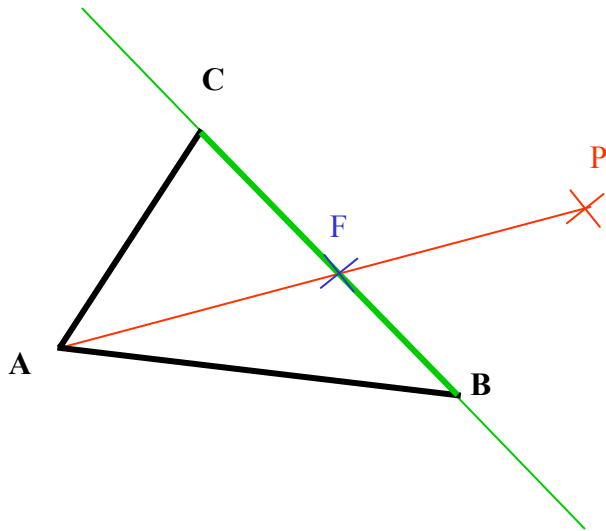
Beweis:

Das Bild eines (nicht ausgearteten) Dreiecks  $ABC$  sei  $A'B'C'$ .  
 $P$  sei *beliebiger* Punkt



Zu zeigen: Bild  $P'$  von  $P$  eindeutig festgelegt.

Zeichne die Gerade  $AP$  (für  $P \neq A$ )



1. Fall: **AP** schneidet die Gerade **BC** in einem Punkt **F**.

Bildpunkt **F'** von **F** liegt auf **B'C'**.

Geradentreue und Längentreue  $\Rightarrow \overline{BF} = \overline{B'F'}$  ,  $\overline{CF} = \overline{C'F'}$

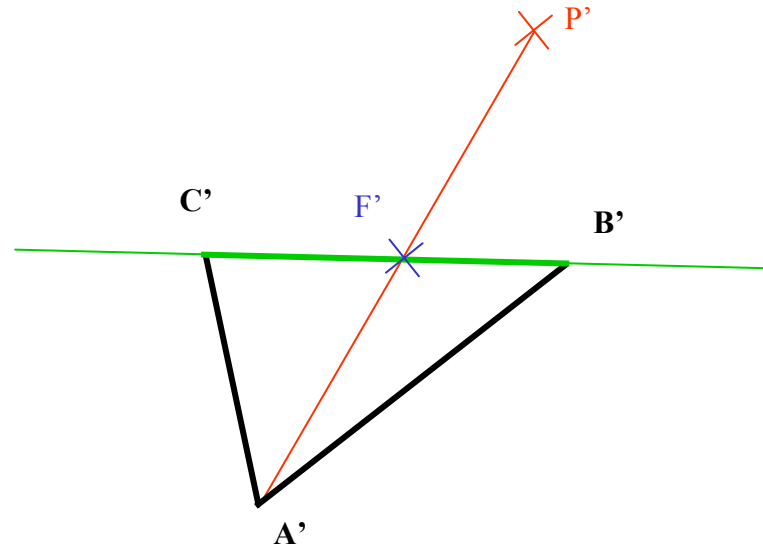
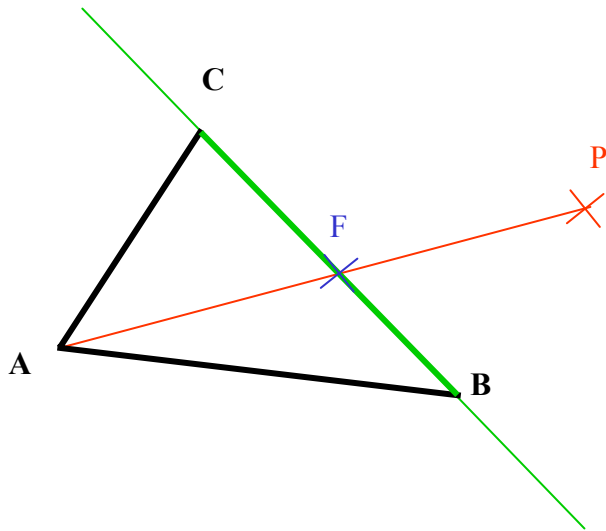
$\Rightarrow$  **F'** eindeutig bestimmt .

**P'** liegt auf **A'F'** .

Längentreue  $\Rightarrow \overline{F'P'} = \overline{FP}$

**P'** eindeutig bestimmt.





2.Fall: **AP** schneidet die Gerade **BC** nicht.  
 $\Rightarrow$  **zur Übung selbst bearbeiten.**

3.Fall:  $P=A$ .  $\Rightarrow$   $AP$  ist nicht definiert.

$P'=A'$   $\Rightarrow$   **$P'$  eindeutig bestimmt.**

## 2.3 Hintereinanderausführen von 2 Achsenspiegelungen



Experimentieren mit DynaGeo

Zusammenfassung der Ergebnisse:

### Satz 2.7

Die Hintereinanderausführung von 2 Achsenspiegelungen ist eine Drehung oder eine Verschiebung.

Dabei gilt:

**Schneiden** sich die beiden Achsen in  $Z$  unter  $\angle \alpha$ , so lässt sich die Zweifachspiegelung durch eine **Drehung** um  $Z$  um  $\angle 2\alpha$  ersetzen.

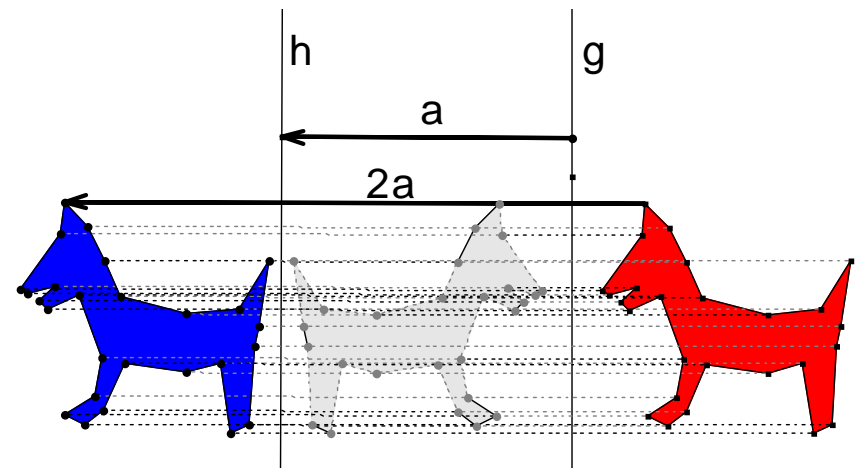
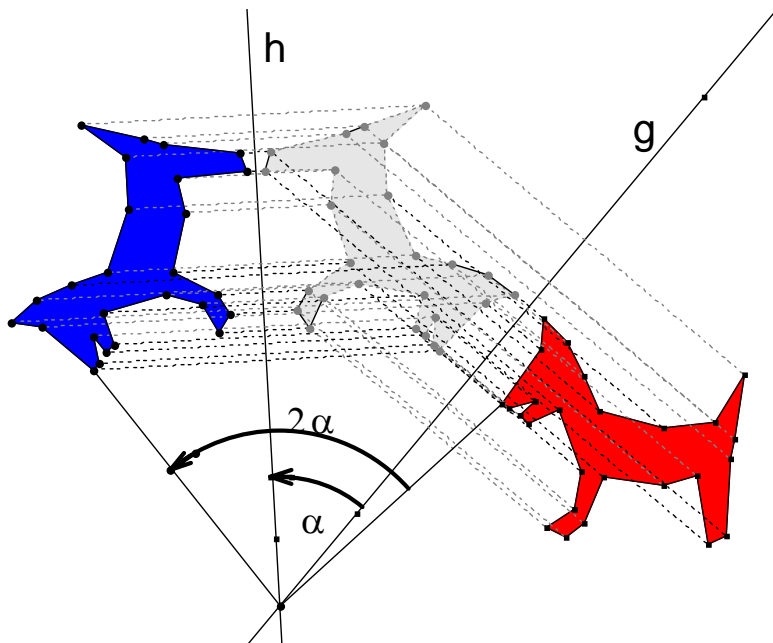
Die Reihenfolge der Achsenspiegelung legt den Winkel fest:

$\alpha$  ist der Winkel, der überstrichen wird, wenn die erste Spiegelachse im Gegenuhrzeigersinn auf die zweite Spiegelachse gedreht wird.

Sind die beiden Achsen **parallel** im Abstand **a**, so lässt sich die Zweifachspiegelung durch eine **Verschiebung** um **2a** senkrecht zur Achsenrichtung ersetzen.

Die Reihenfolge der Achsenspiegelung legt die Richtung der Verschiebung fest:

Die Verschiebung erfolgt von der ersten Spiegelachse auf die zweite Spiegelachse zu.



# Definition einer Drehung

## Definition

Es sei  $Z$  ein Punkt der Ebene  $E$ ,  $\alpha$  eine Winkelgröße.

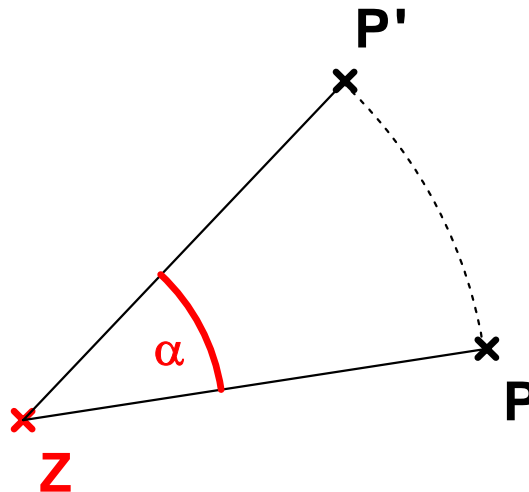
Eine Abbildung  $D_{Z,\alpha} : E \rightarrow E$  heißt Drehung

$\Leftrightarrow$  für jeden Punkt  $P$  und seinen Bildpunkt  $P'$  gilt:

$$\overline{P'Z} = \overline{PZ}$$

$$\angle PZP' = \alpha$$

Ist  $P = Z$ , so ist  $P' = Z = P$ .



# Definition einer Verschiebung

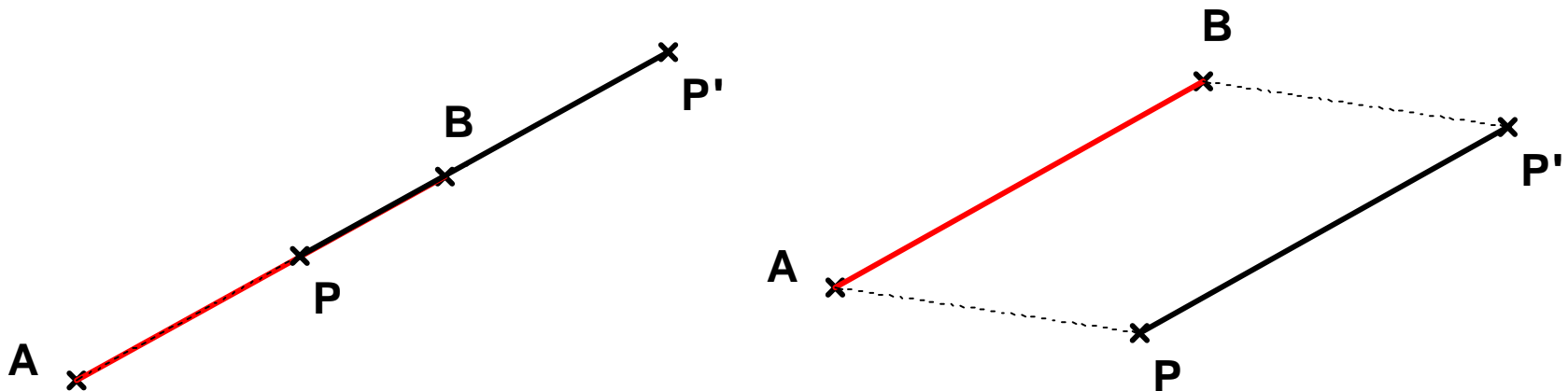
## Definition

Es seien  $A, B$  zwei verschiedene Punkte der Ebene  $E$ .

Eine Abbildung  $V_{A,B} : E \rightarrow E$  heißt Verschiebung um  $\overrightarrow{AB}$

$\Leftrightarrow$  für alle Punkte  $P$  der Ebene gilt:

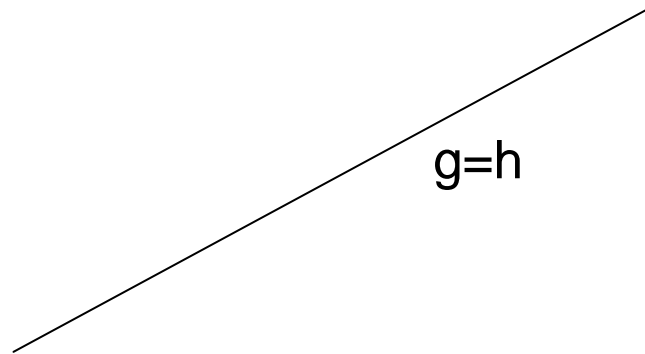
- liegt  $P$  auf der Geraden  $AB$ , so auch  $P'$ ;  
 $\overline{PP'}$  und  $\overline{AB}$  sind gleichlang und gleichgerichtet.
- Sonst bilden die Punkte  $ABP'P$   
(in dieser Reihenfolge) ein Parallelogramm.



## Beweis des Satzes 2.7.

Gegeben sei die Verkettung der Spiegelung  $S_g$  mit  $S_h$ .

**1.Fall:**  $g=h$ , d.h. Spiegelachsen  $g$  und  $h$  fallen zusammen.



$$S_g = S_h \Rightarrow S_g \circ S_h = \text{id.}$$

$\text{id}$  ist Spezialfall einer **Drehung** (um  $0^\circ$ ) **oder**  
einer **Verschiebung** (um Nullvektor).

**2.Fall:** **g** und **h** schneiden sich in Punkt **Z** unter dem Winkel  $\alpha$ .  
 $\alpha$  ist der Winkel, der überstrichen wird, wenn man **g** im  
Gegenuhrzeigersinn auf **h** dreht.

Sei **P** ein beliebiger Punkt,  $P' = S_g(P)$  und  $P'' = S_h(P')$ .

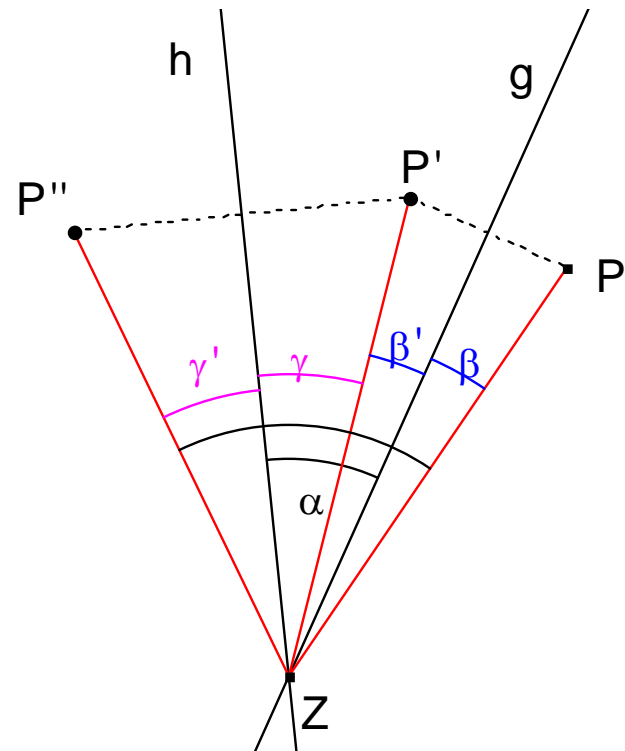
Behauptung:

$P''$  entsteht aus **P** durch Drehung um **Z** um den Winkel  $2\alpha$ .

Wir müssen alle möglichen  
Lagen von **P**, **P'** und **P''**  
bezüglich der Achsen **g** und **h**  
betrachten!

1. Unterfall:

**P**, **P'** und **P''** liegen wie in der  
nebenstehenden Abbildung.



1. Behauptung:

**P, P' und P''** liegen auf einem **Kreisbogen um Z**.

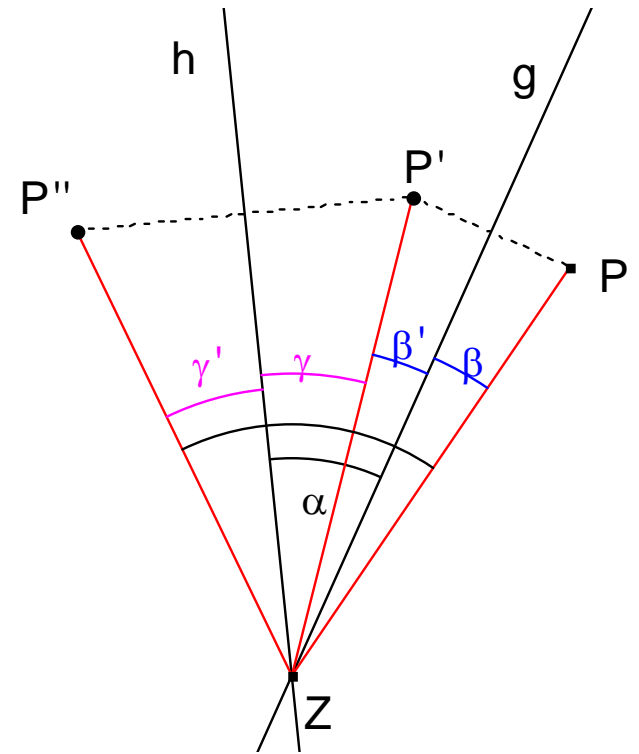
Klar, da wegen der Längentreue von  $S_g$  und  $S_h$  gilt  $\overline{ZP} = \overline{ZP'} = \overline{ZP''}$

2. Behauptung:  $\angle PZP'' = 2\alpha$ .

Wegen der Winkeltreue von  $S_g$  und  $S_h$  ist  $\beta = \beta'$  und  $\gamma = \gamma'$ .

Da  $\alpha = \beta' + \gamma = \beta + \gamma$  und  
 $\angle PZP'' = \beta + \beta' + \gamma + \gamma'$  folgt

$\angle PZP'' = \beta + \beta + \gamma + \gamma = 2(\beta + \gamma) = 2\alpha$ .

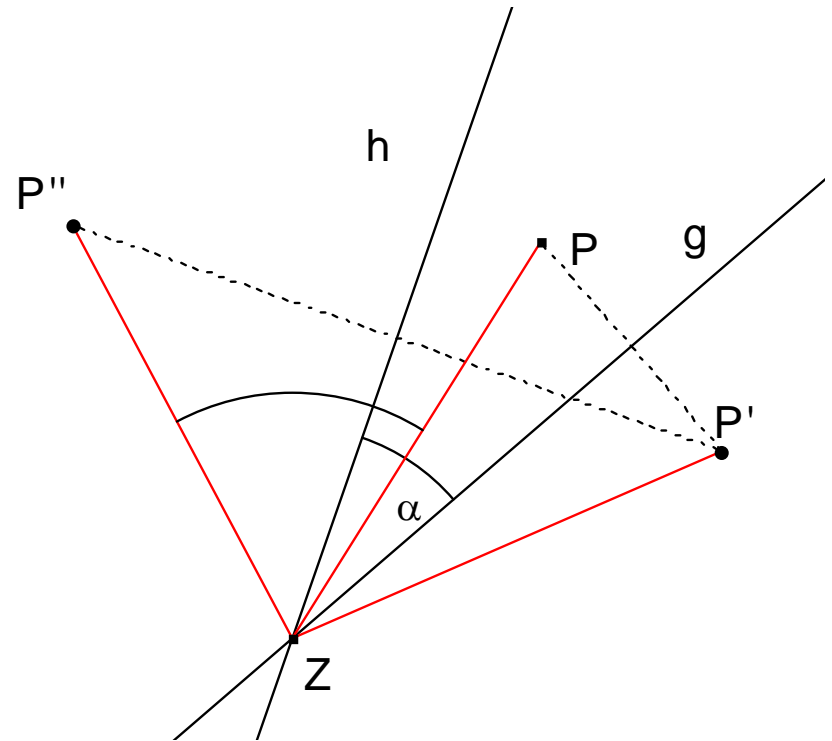




Weitere Unterfälle:

Andere Lagen von  $P$ ,  $P'$ ,  $P''$   
wie z.B. in der  
nebenstehenden Abbildung.

→ Übungsaufgabe



**3.Fall:**  $g \parallel h$  ,  $g \neq h$  mit Abstand  $a$ .

Sei  $P$  ein beliebiger Punkt,  $P' = S_g(P)$  und  $P'' = S_h(P')$ .

Behauptung:

$P''$  entsteht aus  $P$  durch Verschiebung um  $2a$  in der Richtung senkrecht von  $g$  nach  $h$ .

Wir müssen alle möglichen Lagen von  $P$ ,  $P'$  und  $P''$  bezüglich der Achsen  $g$  und  $h$  betrachten!

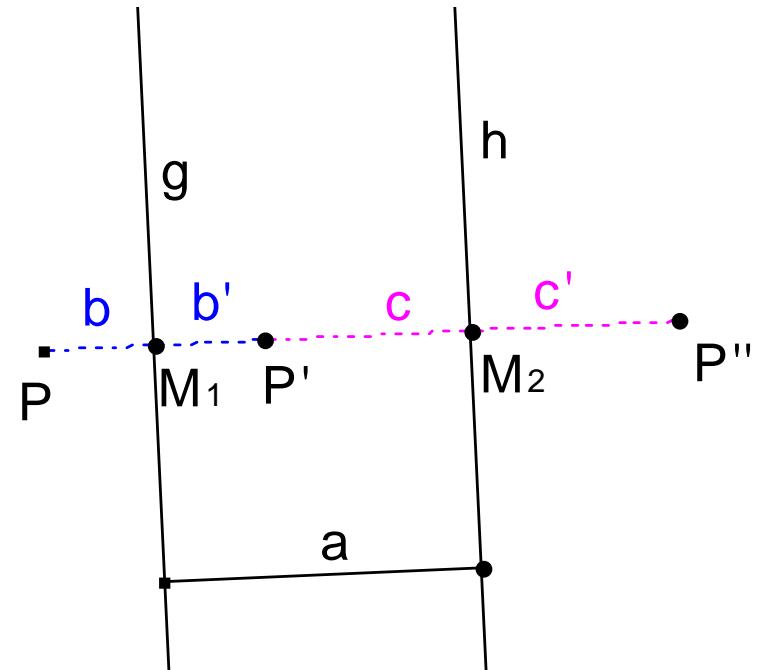
1. Unterfall:

$P$ ,  $P'$  und  $P''$  liegen wie in der nebenstehenden Abbildung .

1.Behauptung:

$P$ ,  $P'$  und  $P''$  liegen auf einer Senkrechten zu den Achsen  $g$  und  $h$ .

Klar nach Definition der Achsenspiegelung!



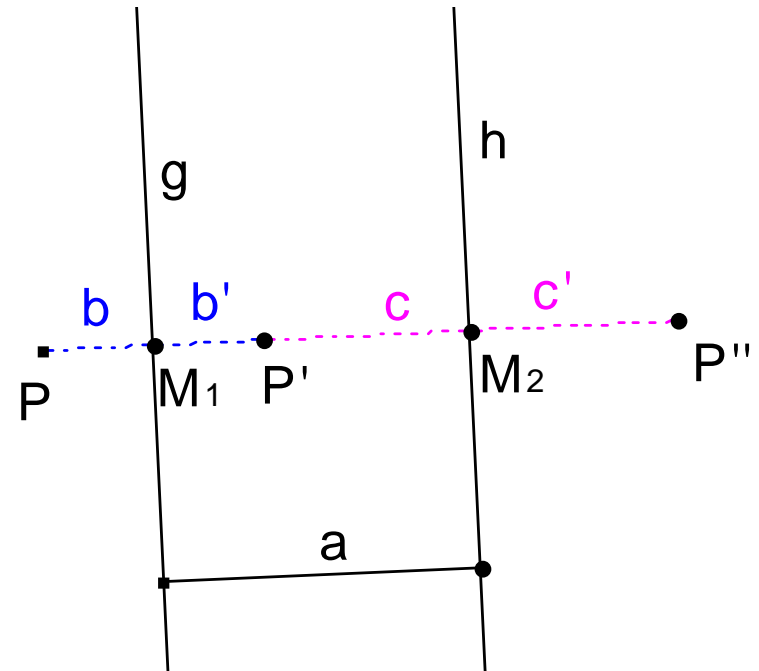
2. Behauptung:  $\overline{PP''} = 2a$ .

Nach Definition der  
Achsen Spiegelung ist

$$b = \overline{PM_1} = \overline{M_1P'} = b'$$

$$c = \overline{P'M_2} = \overline{M_2P''} = c'$$

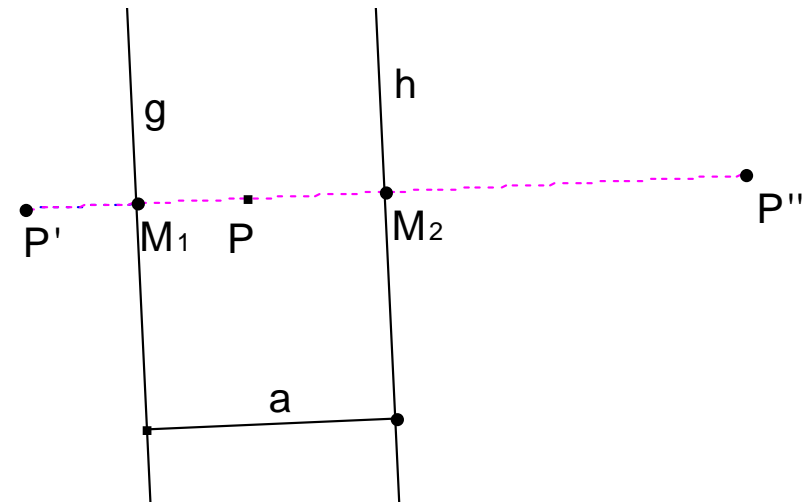
$$a = b' + c \Rightarrow \overline{PP''} = 2b + 2c = 2a.$$



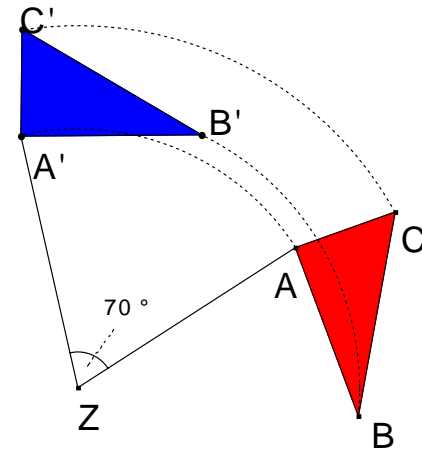
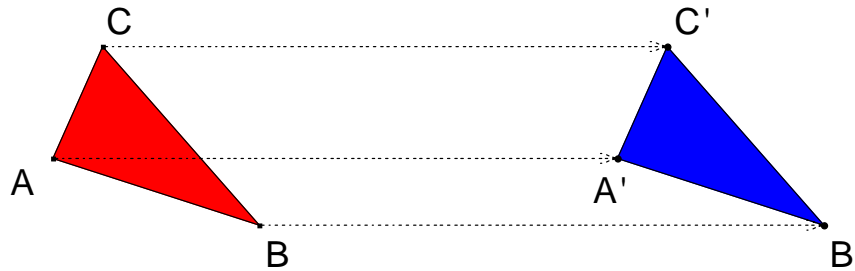
Weitere Unterfälle:

Andere Lagen von P, P', P'' wie  
z.B. in der nebenstehenden  
Abbildung.

→ Übungsaufgabe



Auch die **Umkehrung von Satz 2.7** gilt!



Jede **Drehung**  $D_{Z,\alpha}$  lässt sich durch eine **Doppelspiegelung** ersetzen. Dabei müssen sich die beiden Spiegelachsen in Z unter  $\angle \frac{1}{2} \alpha$  schneiden.

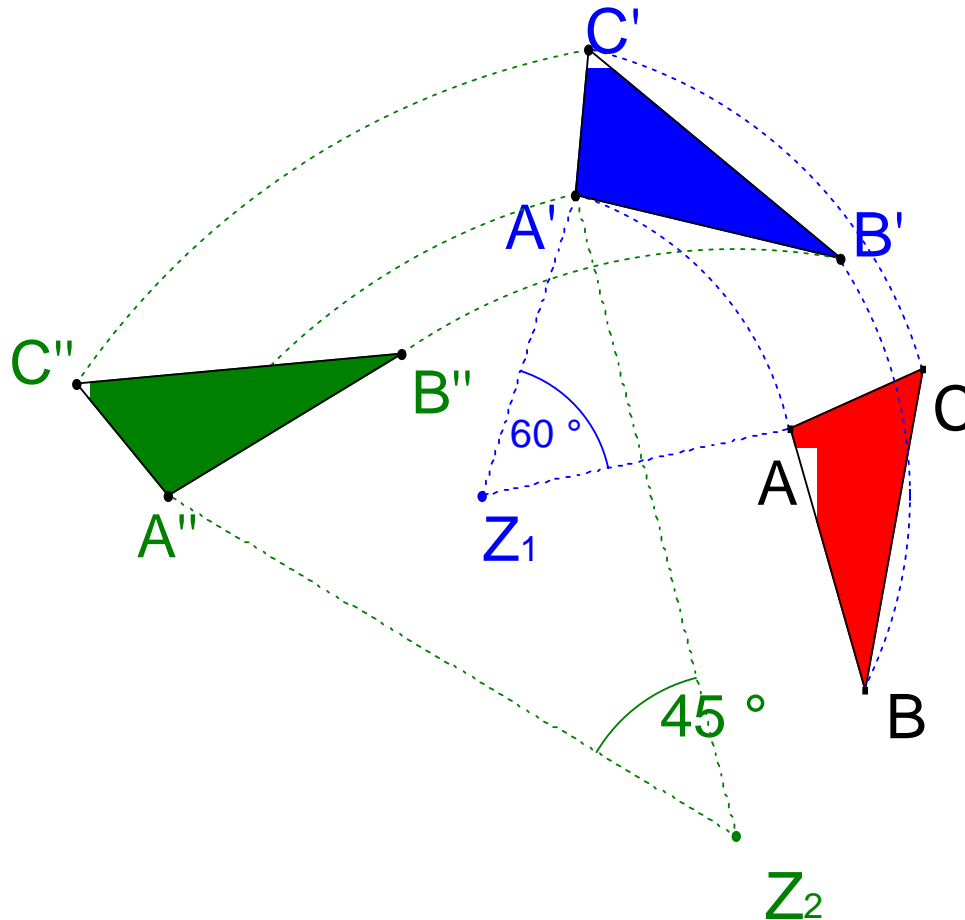
Jede **Verschiebung**  $v$  lässt sich durch eine **Doppelspiegelung** an parallelen Achsen im Abstand  $\frac{1}{2} \vec{v}$ , senkrecht zu  $\vec{v}$ , ersetzen. Orientierung des Winkels bzw. Verschiebungsrichtung beachten!

Geben Sie jeweils solche Achsen an.  
Welche Bedingungen müssen dafür gelten?

## Anwendung von Satz 2.7

### Aufgabe

Was kann man über die Verkettung von zwei Drehungen sagen?



## Aufgabe

Konstruieren Sie Achsen für zwei Geradenspiegelungen, deren Verkettung eine Drehung um  $90^\circ$  ( $180^\circ$ ,  $45^\circ$ ) ergibt.

Überprüfen Sie durch Ausführen der Spiegelungen eines Dreiecks, dass sich tatsächlich jeweils die erwartete Drehung ergibt.

## Aufgabe

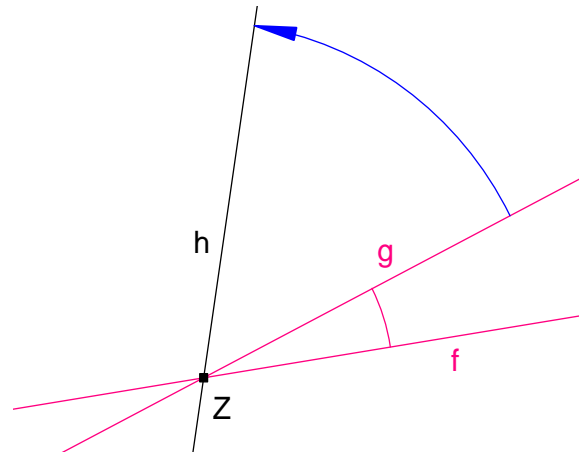
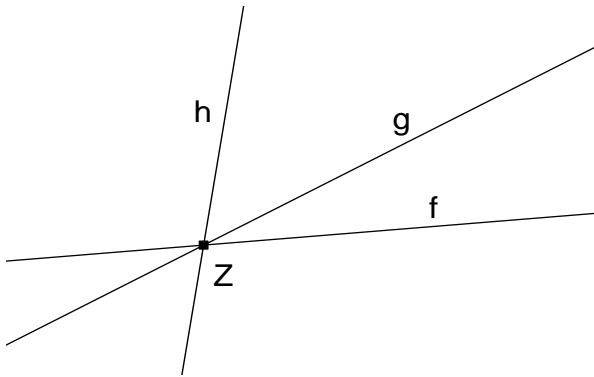
Die Geraden  $f$ ,  $g$ ,  $h$  gehen durch einen gemeinsamen Punkt, der Winkel  $\angle f,g$  zwischen  $f$  und  $g$  sei  $30^\circ$ , der Winkel  $\angle g,h$  sei  $70^\circ$ .

Die Doppelspiegelung  $S_f \circ S_g$  soll durch zwei Achsenspiegelungen dargestellt werden, deren eine Achse  $h$  ist. Konstruieren Sie die zweite Achse.

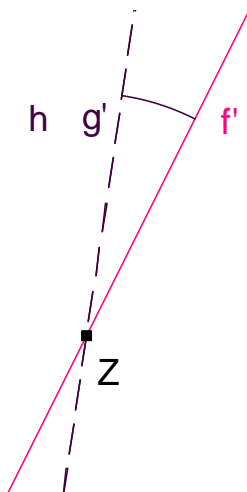
## 2.4 Hintereinanderausführen von 3 Achsenspiegelungen

Die Zahl der zu untersuchenden Fälle von gegenseitiger Lage der Achsen zueinander ist hier viel größer als zuvor.

**1.Fall:** Die Achsen schneiden sich in einem Punkt.



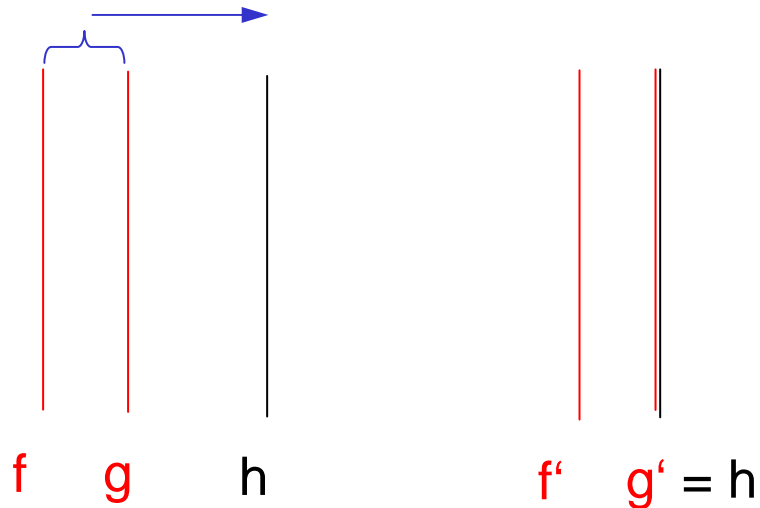
Die Drehung des Achsenpaares (f,g) um Z ändert die Verkettung  $S_f \circ S_g$  nicht.



$$\begin{aligned} S_f \circ S_g \circ S_h &= (S_f \circ S_g) \circ S_h = \\ (S_{f'} \circ S_{g'}) \circ S_h &= S_{f'} \circ (S_{g'} \circ S_h) = \\ S_{f'} \circ \text{id} &= S_{f'} \end{aligned}$$

$\Rightarrow$  **eine Achsenspiegelung an f'**

## 2.Fall: Die 3 Achsen sind parallel.



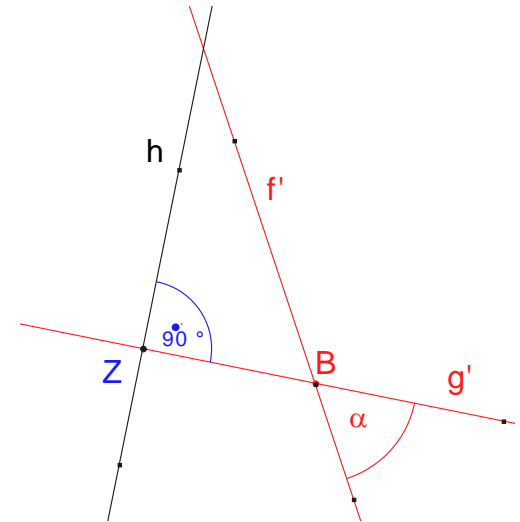
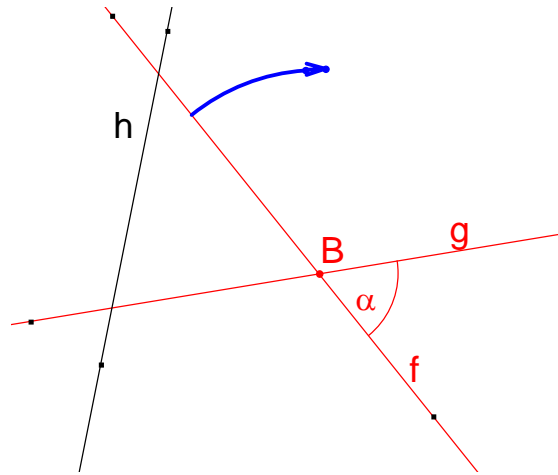
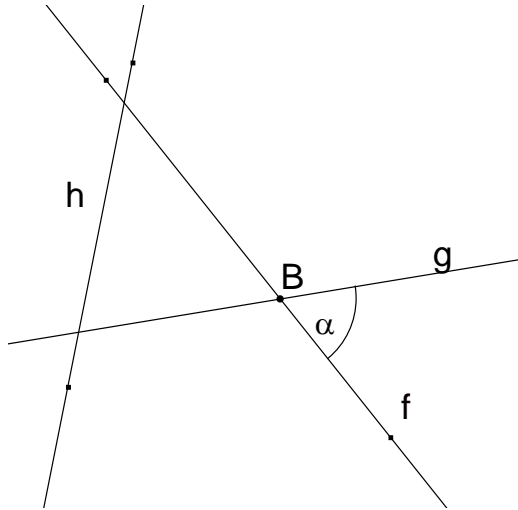
Die Verschiebung des Achsenpaares (f,g) ändert die Verkettung  $S_f \circ S_g$  nicht.

$$\begin{aligned}
 S_f \circ S_g \circ S_h &= \\
 (S_f \circ S_g) \circ S_h &= \\
 (S_{f'} \circ S_{g'}) \circ S_h &= \\
 S_{f'} \circ (S_{g'} \circ S_h) &= \\
 S_{f'} \circ \text{Id} &= S_{f'}
 \end{aligned}$$

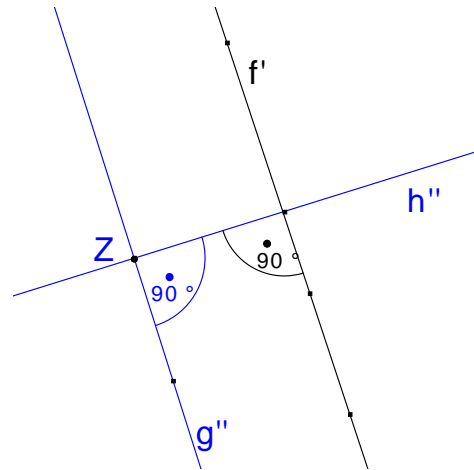
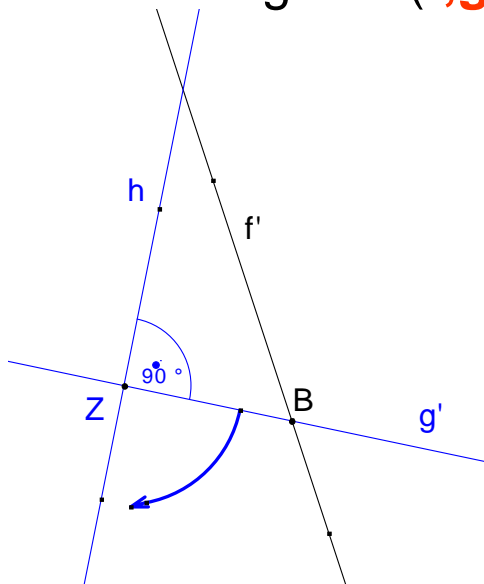
$\Rightarrow$  **eine** Achsenspiegelung  $S_{f'}$  an  $f'$  .



### 3.Fall: Die Achsen bilden ein Dreieck.



1. Drehung von  $(f, g)$  um  $B$ , so dass  $g' \perp h$ ,  $Z$  Schnittpunkt von  $g'$  und  $h$ .

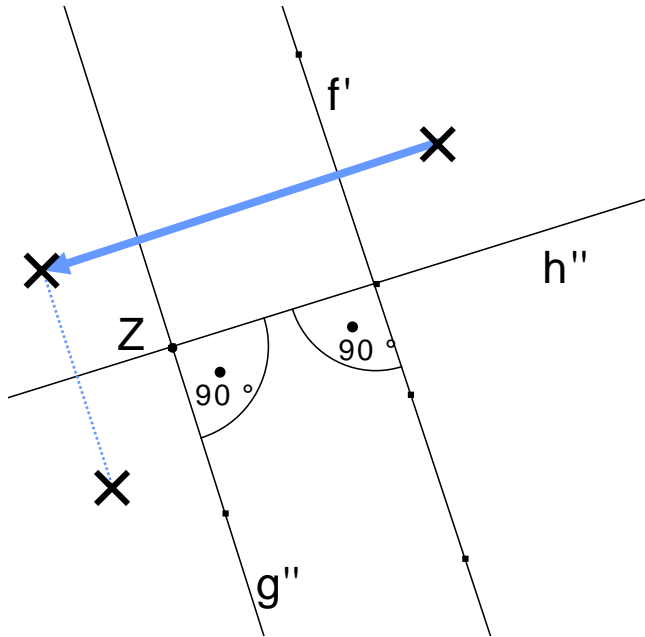


2. Drehung von  $(g', h)$  um  $Z$  so, dass  $h'' \perp f'$

$$\begin{aligned}
 S_f \circ S_g \circ S_h &= \\
 (S_f \circ S_g) \circ S_h &= \\
 (S_{f'} \circ S_{g'}) \circ S_h &= \\
 S_{f'} \circ (S_{g'} \circ S_h) &= \\
 S_{f'} \circ (S_{g''} \circ S_{h''}) &= \\
 (S_{f'} \circ S_{g''}) \circ S_{h''} &=
 \end{aligned}$$

$(S_{f'} \circ S_{g''})$  ist **Verschiebung** parallel zur Spiegelachse  $h''$ .

Danach **Spiegelung** an  $h''$ .

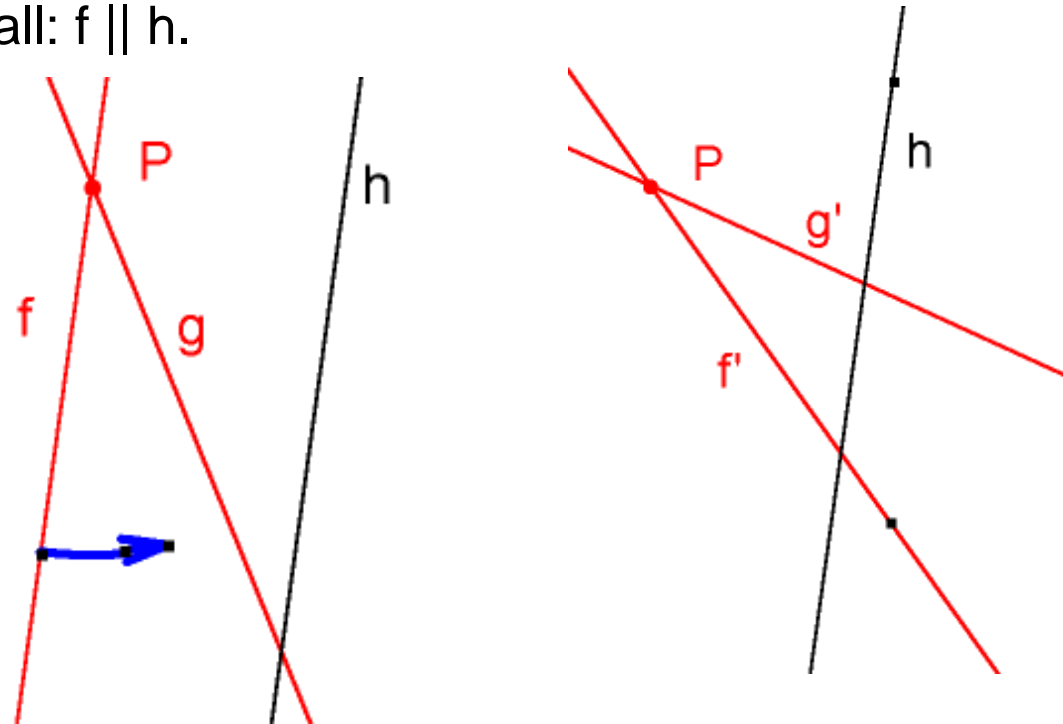


⇒ **Verschiebung** gefolgt von einer **Spiegelung** an einer zur Verschiebungsrichtung parallelen Achse.

Solche Kongruenzabbildungen bezeichnen wir als **„Schubspiegelung“**.

#### 4.Fall: 2 Achsen sind parallel.

1. Unterfall:  $f \parallel h$ .



Drehen von Achsenpaar ( $f, g$ ) um ihren Schnittpunkt  $P$

⇒ Lage wie im 3.Fall

⇒ **Schubspiegelung**

2. Unterfall:  $f \parallel g$  → Übung

Damit haben wir bewiesen:

### **Satz 2.8**

**Die Hintereinanderausführung von 3 Achsenspiegelungen ist eine Achsenspiegelung oder eine Schubspiegelung.**

Die bislang als Verkettung von Achsenspiegelungen gewonnenen Kongruenzabbildungen Drehung, Verschiebung und Schubspiegelung sollen jetzt jeweils noch auf andere Art definiert werden.

## 2.5 Drehungen und ihre Eigenschaften

### Definition 2.3

Es sei  $Z$  ein Punkt der Ebene  $E$ ,  $\alpha$  eine Winkelgröße.

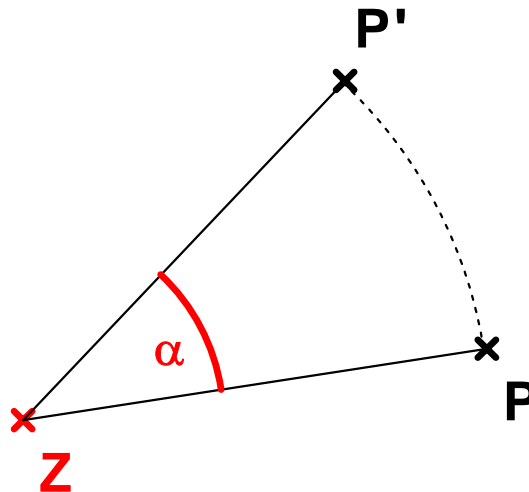
Eine Abbildung  $D_{Z,\alpha} : E \rightarrow E$  heißt Drehung

$\Leftrightarrow$  für jeden Punkt  $P$  und seinen Bildpunkt  $P'$  gilt:

$$\overline{P'Z} = \overline{PZ}$$

$$\angle PZP' = \alpha$$

Ist  $P = Z$ , so ist  $P' = Z = P$ .



## Eigenschaften einer Drehung $D_{Z,\alpha}$ :

$$D_{Z,\alpha}^{-1} = D_{Z,-\alpha} = D_{Z,360^\circ-\alpha}$$

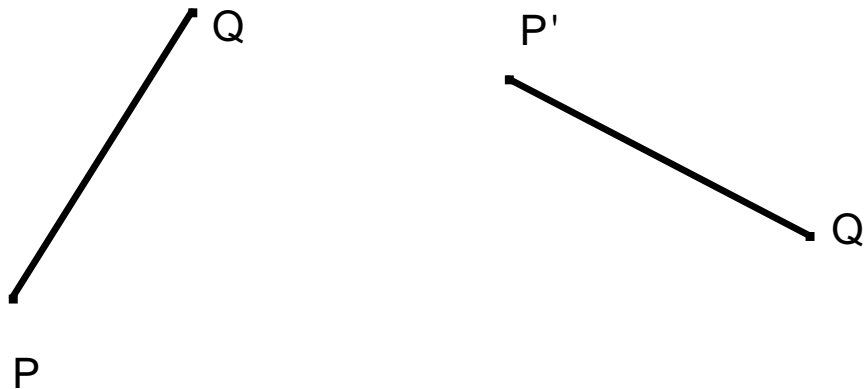
2 verschiedene Punktepaare  $(P,P')$ ,  $(Q,Q')$  legen die Drehung eindeutig fest (falls es eine solche gibt).

## Aufgabe

Zeigen Sie, dass es zu zwei gleich langen nicht parallelen Strecken  $\overline{PQ}$  und  $\overline{P'Q'}$  genau eine Drehung gibt, die  $P$  auf  $P'$  und  $Q$  auf  $Q'$  abbildet.

Konstruieren Sie eine solche

- durch Konstruktion eines Zentrums  $Z$  und des Drehwinkels  $\alpha$ ,
- durch Konstruktion von zwei Achsenspiegelungen.



## Weitere Eigenschaften einer Drehung $D_{Z,\alpha}$ :

**Fixelemente** von  $D_{Z,\alpha}$  (für  $\alpha \neq 0^\circ$ )

Fixpunkte:  $Z$

Fixpunktgeraden: keine

Fixgeraden: keine (für  $\alpha \neq 0^\circ, \alpha \neq 180^\circ$ ).

## Invarianten

geradentreu,

längentreu,

winkelmaßtreu,

flächeninhaltsreu,

umlaufsinnreu.

## Weitere beweisbare Eigenschaften

Ist  $Z \in g$ , so ist  $Z \in g'$ ,

Gerade und Bildgerade haben von  $Z$  denselben Abstand ,

Gerade und Bildgerade schneiden sich unter  $\alpha$  (Begründung?).



# Punktspiegelung (Sonderfall der Drehung; Drehwinkel $\alpha = 180^\circ$ )

## Definition 2.4

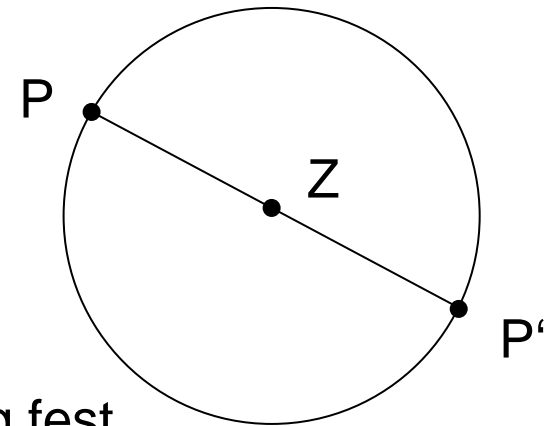
Sei  $Z$  ein Punkt der Ebene  $E$ .

Eine Abbildung heißt **Punktspiegelung an  $Z$**

- $\Leftrightarrow$  für jeden Punkt  $P$  und seinen Bildpunkt  $P'$  gilt:  
Ist  $P = Z$ , so ist  $P' = Z = P$   
sonst halbiert  $Z$  die Strecke  $\overline{PP'}$ .

## *Zusätzliche Eigenschaften einer Punktspiegelung (gegenüber einer Drehung)*

- $D_{Z,180}^{-1} = D_{Z,180}$ ,
- $D_{Z,180}$  liegt durch **ein** Punktepaar  $(P, P')$  eindeutig fest (falls  $P \neq P'$ ),
- alle Geraden durch  $Z$  sind Fixgeraden,
- $g' \parallel g$  (Originalgerade und Bildgerade sind parallel).



## 2.6 Verschiebungen und ihre Eigenschaften

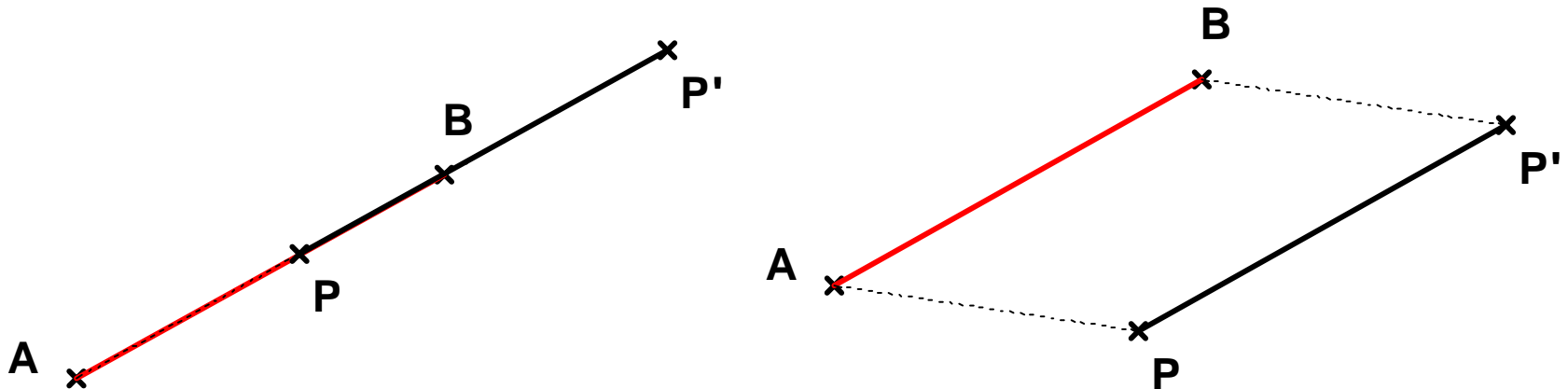
### Definition 2.5

Es seien  $A, B$  zwei verschiedene Punkte der Ebene  $E$ .

Eine Abbildung  $V_{A,B} : E \rightarrow E$  heißt Verschiebung um  $\overrightarrow{AB}$

$\Leftrightarrow$  für alle Punkte  $P$  der Ebene gilt:

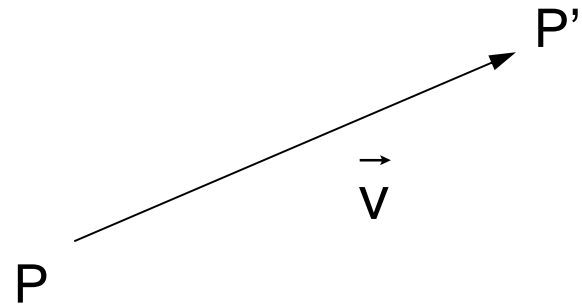
- liegt  $P$  auf der Geraden  $AB$ , so auch  $P'$ ;  
 $\overline{PP'}$  und  $\overline{AB}$  sind gleichlang und gleichgerichtet.
- Sonst bilden die Punkte  $ABP'P$   
(in dieser Reihenfolge) ein Parallelogramm.



## Eigenschaften einer Verschiebung $V_{A,B}$ :

$$V_{A,B}^{-1} = V_{B,A}$$

Eine Verschiebung liegt durch 1 Punktepaar  $(P, P')$  eindeutig fest. Wir veranschaulichen die durch das Punktepaar  $(P, P')$  festgelegte Verschiebung oft durch einen Pfeil von  $P$  nach  $P'$  und schreiben auch  $V_{\vec{v}}$  .



**Fixelemente von  $V_{A,B}$ :** (für  $A \neq B$ )

- keine Fixpunkte,
- alle Geraden parallel zu AB sind Fixgeraden.

## Invarianten:

- geradentreu,
- winkelmaßtreu,
- längentreu,
- flächeninhaltenstreu,
- Umlaufsinn bleibt erhalten.

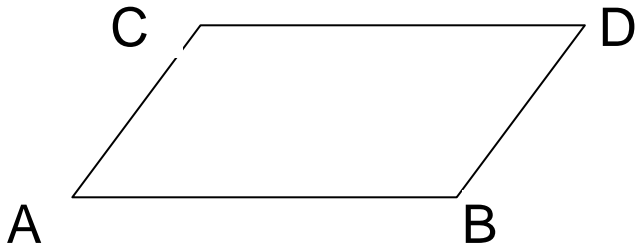
## Zusätzliche Eigenschaft:

$g' \parallel g$  (d.h. Originalgerade und Bildgerade sind parallel).  
Begründung?

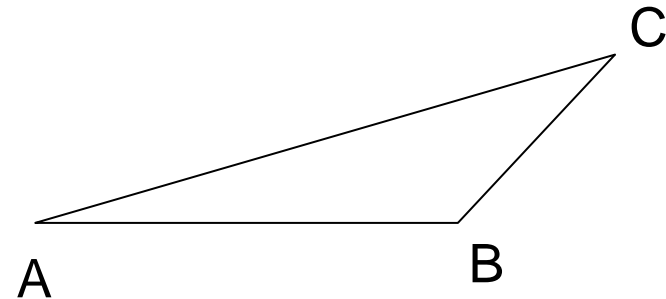
## Aufgabe

- (a)  $ABDC$  sei ein Parallelogramm. Zeigen Sie mit Hilfe der Definition 2.5, dass gilt  $V_{A,B} = V_{C,D}$ .
- (b) Zeigen Sie mit Hilfe der Definition 2.5, dass für die Verkettung von zwei Verschiebungen gilt  $V_{A,B} \circ V_{B,C} = V_{A,C}$ .

Zu (a)



Zu (b)



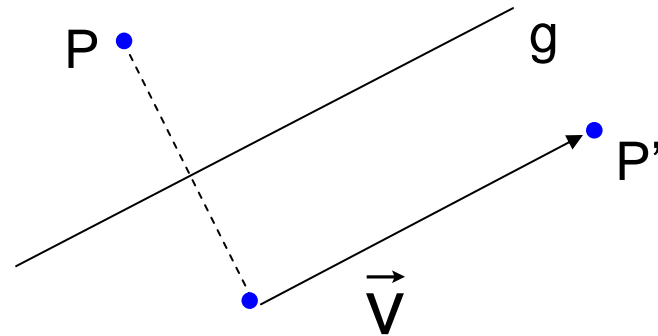
## 2.6 Schubspiegelungen (Gleitspiegelungen) und ihre Eigenschaften

### Definition 2.6

Schubspiegelungen sind Abbildungen, die aus dem Hintereinanderausführen einer Achsenspiegelung und einer Verschiebung bestehen.

Dabei liegt die Spiegelachse parallel zur Verschiebungsrichtung.

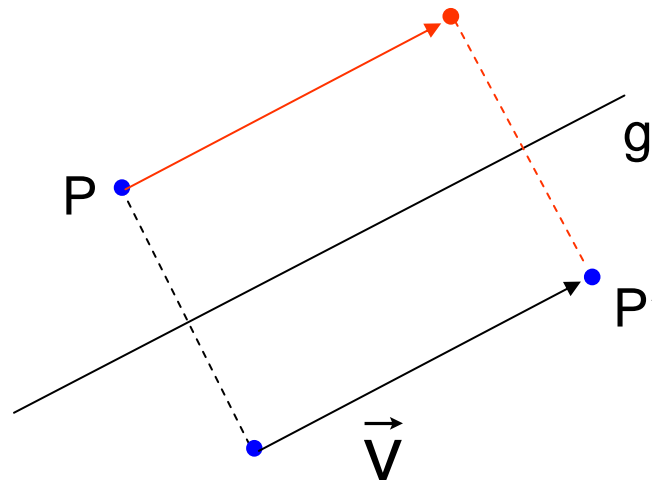
Schubspiegelung  $\text{Sch}_{g, \vec{v}}$



# Eigenschaften einer Schubspiegelung $Sch_{g, \vec{v}}$

- Schubspiegelungen sind Verkettungen von Spiegelungen an 3 Achsen, von denen die ersten beiden parallel zueinander sind und die dritte senkrecht dazu ist.
- Man kann die Reihenfolge von Verschiebung und Achsenspiegelung vertauschen, wenn die Verschiebung parallel zur Spiegelachse verläuft:

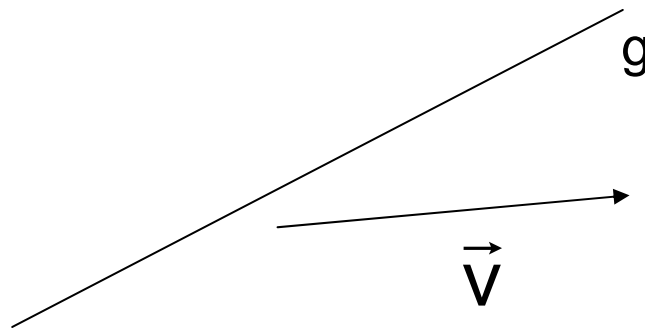
$$V_{\vec{v}} \circ S_g = S_g \circ V_{\vec{v}}$$



## Aufgabe

Beweisen Sie, dass die Verkettung einer Achsenspiegelung mit einer Verschiebung immer eine Schubspiegelung ist (auch wenn die Verschiebung nicht parallel zur Spiegelachse verläuft) und führen Sie die Konstruktion der Spiegelachse und des Verschiebungsvektors für einige Beispiele durch.

Beachten Sie: In diesem Fall kann man die Achsenspiegelung und die Verschiebung nicht vertauschen. Wir vereinbaren hier: Zuerst die Achsenspiegelung, dann die Verschiebung.





## 2.8 Kongruenzabbildungen - Produkte von Achsenspiegelungen

Nach dieser Vorarbeit: **Klassifizierung aller Kongruenzabbildungen.**

Zusammenfassung des bisherigen Vorgehens:

- Kongruenzabbildungen sind bijektive, geradentreue, längentreue Abbildungen der Ebene.
- Achsenspiegelungen sind Kongruenzabbildungen.
- Verkettung von Achsenspiegelungen sind Kongruenzabbildungen.
- Jede Kongruenzabbildung ist durch die Abbildung eines Dreiecks eindeutig festgelegt.
- Verkettung von höchstens 3 Achsenspiegelungen ergeben folgende **Abbildungstypen** :
  - ▶ **Achsenspiegelung** bei **1 Achse** (gegensinnige Abbildung),
  - ▶ **Drehung** oder **Verschiebungen** bei **2 Achsen** (gleichsinnige Abbildung),
  - ▶ **Schubspiegelung** oder **Achsenspiegelung** bei **3 Achsen** (gegensinnige Abbildung).

**Ziel:**

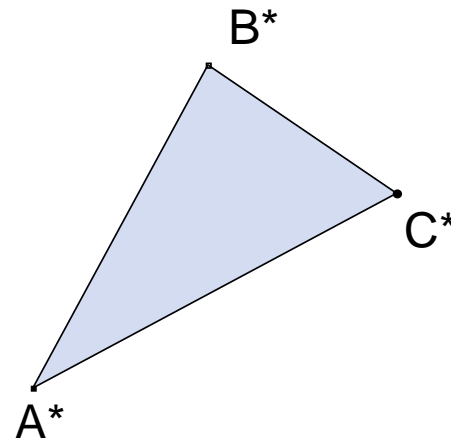
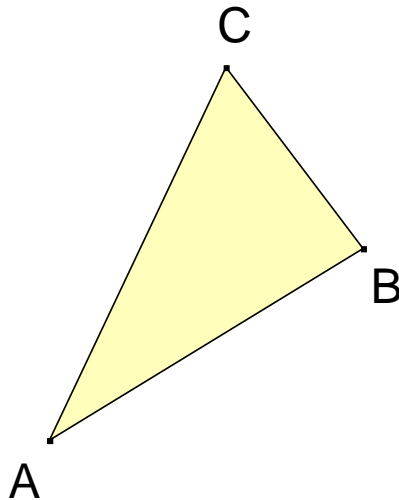
**Jede Kongruenzabbildung ist durch höchstens 3 Achsenspiegelungen darstellbar.**

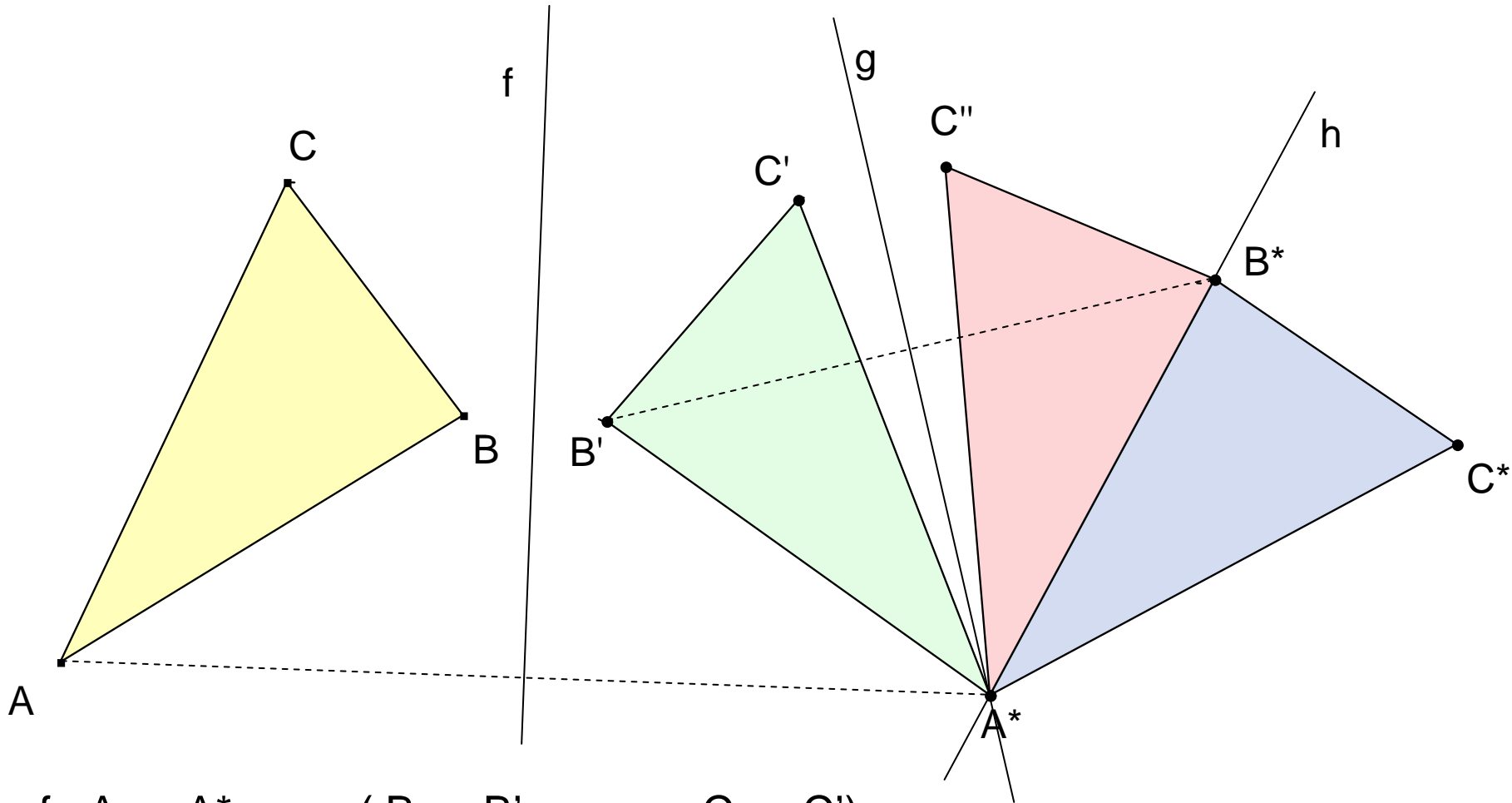
**Dazu beweisen wir zunächst den folgenden Satz.**

**Satz 2.9**

**Gegeben seien zwei Dreiecke  $ABC$  und  $A^*B^*C^*$  mit gleich langen Seiten.**

**Dann lässt sich Dreieck  $ABC$  auf Dreieck  $A^*B^*C^*$  durch eine Verkettung von höchstens 3 Achsenspiegelungen abbilden.**





f:  $A \mapsto A^*$  ,     $( B \mapsto B' , \quad C \mapsto C' )$

g:  $B' \mapsto B^*$  ;     $A^*$  bleibt fest,     $( C' \mapsto C'' )$

h:  $C'' \mapsto C^*$  ;     $A^*$  und  $B^*$  bleiben fest.

## Satz 2.10

**Jede Kongruenzabbildung lässt sich als Einfach-, Zweifach- oder Dreifachspiegelung darstellen.**

Beweis

- Zur Kongruenzabbildung  $f$  wählt man ein beliebiges Dreieck  $ABC$  aus.
- $f$  bildet  $ABC$  auf das Dreieck  $A^*B^*C^*$  ab.
- $A^*B^*C^*$  hat gleiche Seitenlängen wie  $ABC$ .
- Dreieck  $ABC$  wird durch eine Verkettung  $g$  von  $\leq 3$  Achsenspiegelungen auf  $A^*B^*C^*$  abgebildet (Satz 2.9).
- $g$  ist eine Kongruenzabbildung.
- Kongruenzabbildungen sind durch das Bild eines Dreiecks eindeutig bestimmt (Satz 2.6).
- $\Rightarrow f = g$ ,  $f$  wird also durch  $\leq 3$  Achsenspiegelungen dargestellt.

## Satz 2.11 (Dreispiegelungssatz)

**Die Verkettung von beliebig vielen Achsenspiegelungen lässt sich auf eine Verkettung von  $\leq 3$  Achsenspiegelungen reduzieren.**

## **Satz 2.12**

**Jede Kongruenzabbildung ist von einem der Typen**

- **Achsen Spiegelung,**
- **Drehung,**
- **Verschiebung,**
- **Schubspiegelung.**

Beweis

Einfache Folgerung aus Satz 2.10. und der Analyse der Verkettung von  $\leq 3$  Achsen Spiegelungen.

## 2.9 Hintereinanderausführen von 4 und mehr Geradenspiegelungen

Gezeigt:

Verkettung von beliebig vielen Achsenspiegelungen  $\Rightarrow$

Verkettung von  $\leq 3$  Achsenspiegelungen

Nicht gezeigt:

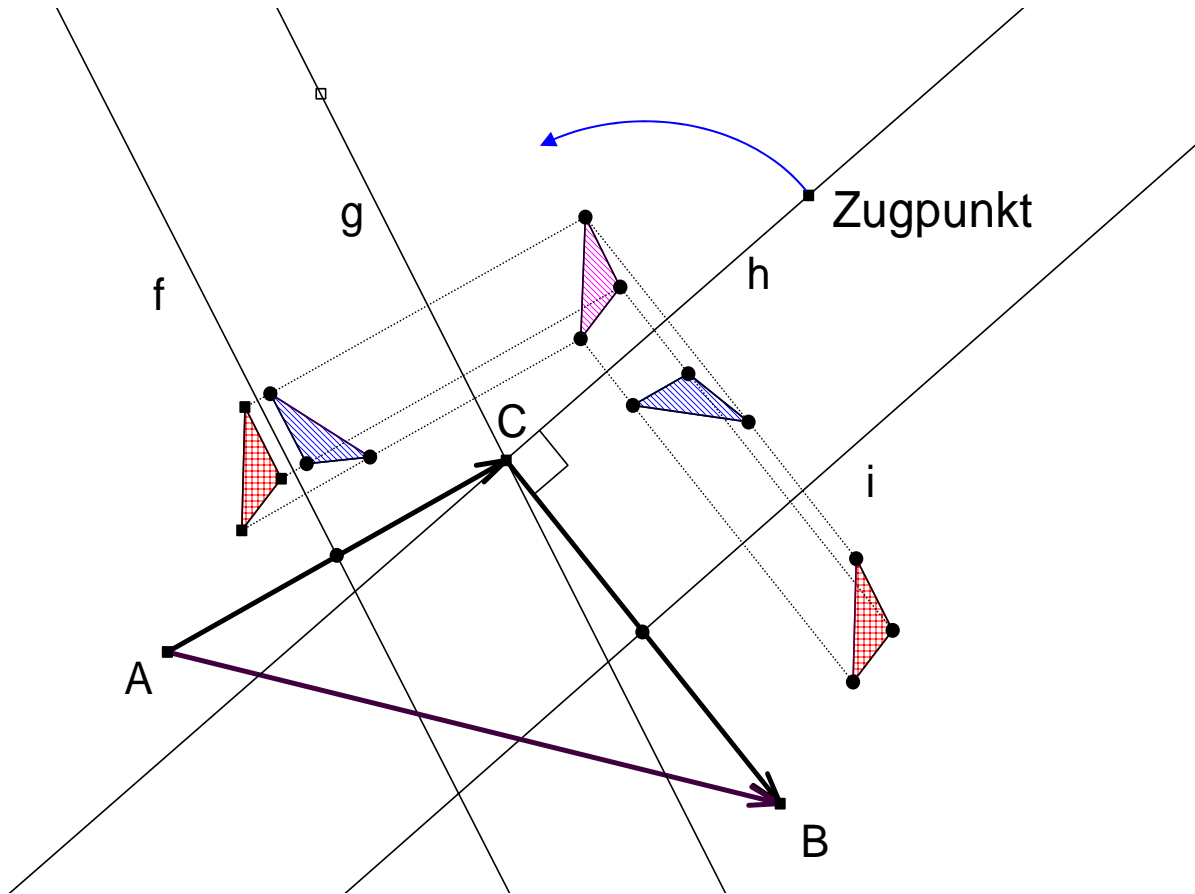
Wie ergeben sich diese Achsenspiegelungen aus den gegebenen Achsenspiegelungen?

Verkettung von zwei Drehungen  $\Rightarrow$  **Anwendung von Satz 2.7** , [Aufgabe](#)

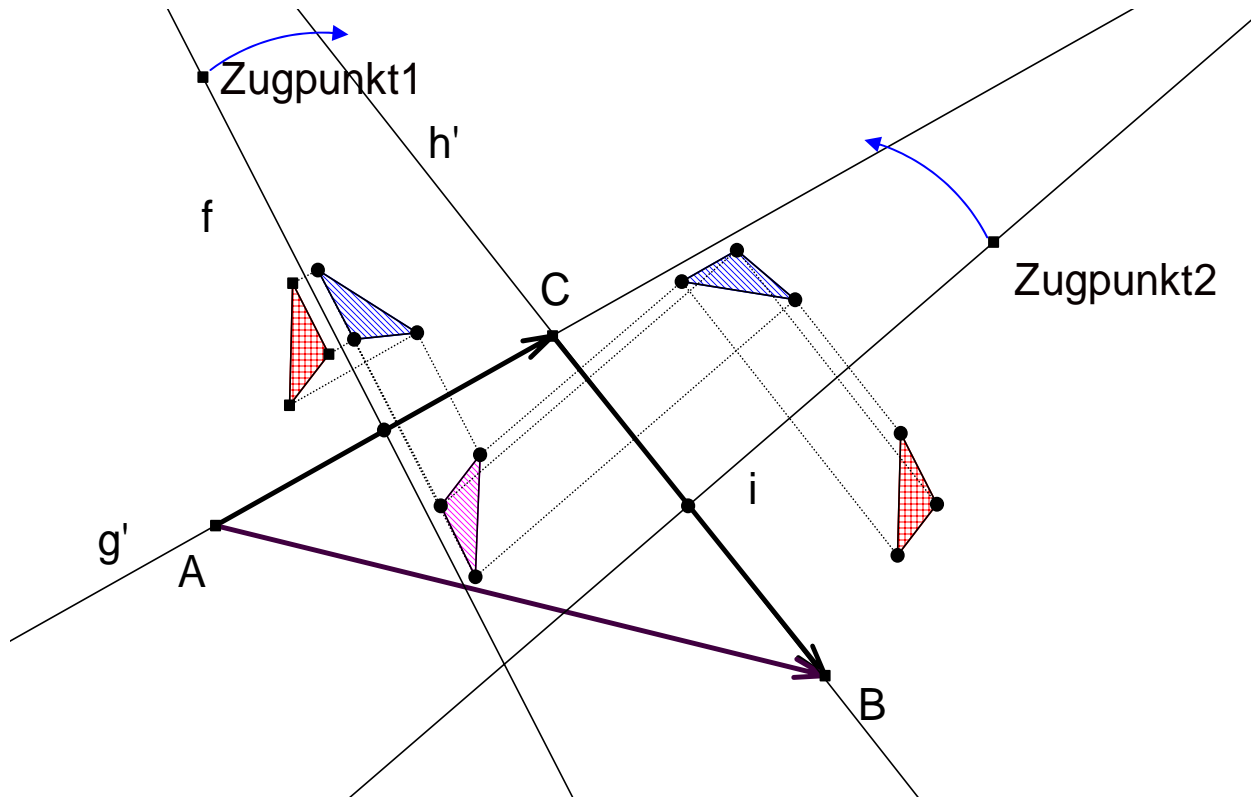
Verkettung von zwei Verschiebungen  $\Rightarrow$  nächste Seite

Verkettung einer Verschiebung und einer Drehung  $\Rightarrow$  Übung

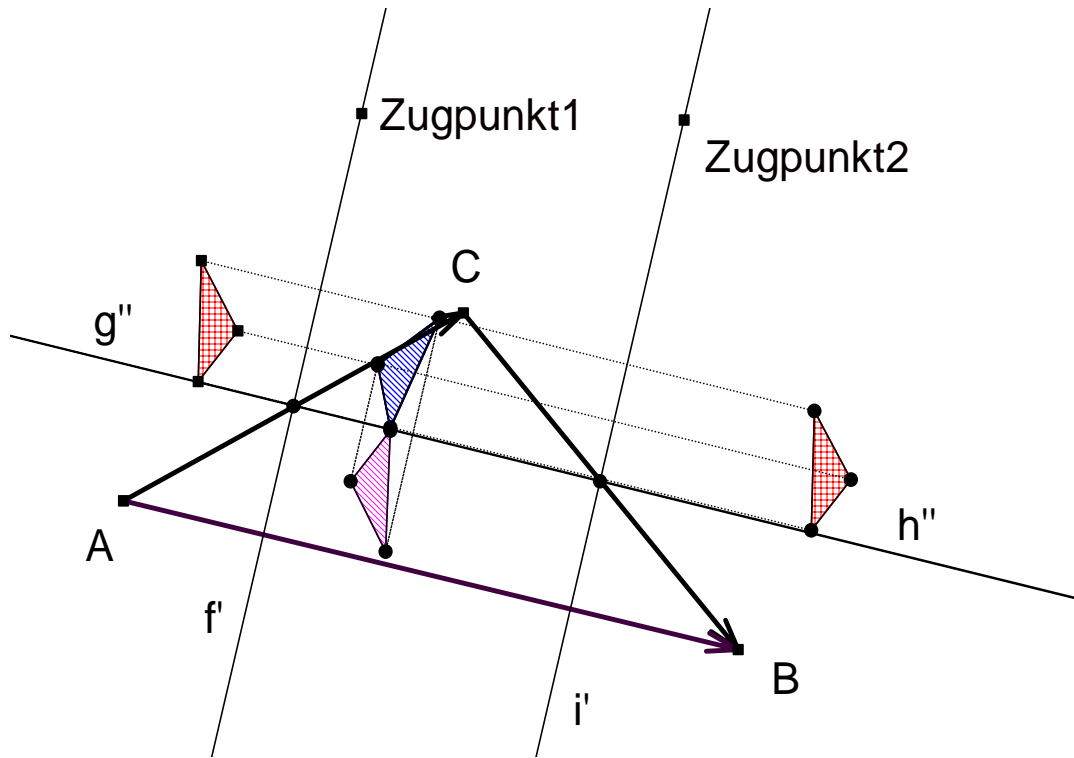
# Verkettung von zwei Verschiebungen



Drehung von  $(g,h)$  um C, so dass  $g'$  auf AC fällt







$f'$  und  $i'$  sind parallel und ihr Abstand ist die Hälfte der Länge der Seite  $\overline{AB}$

Wir halten diese Ergebnisse nochmals fest.

### **Satz 2.13**

- Die Verkettung von zwei Drehungen ist eine Verschiebung, wenn für die Drehwinkel  $\alpha_1$  und  $\alpha_2$  gilt  $\alpha_1 + \alpha_2 = 360^\circ$ , andernfalls eine Drehung um den Winkel  $\alpha_1 + \alpha_2$ .
- Die Verkettung von zwei Verschiebungen ist eine Verschiebung nach den Gesetzen der Vektoraddition.

### **Satz 2.14**

- Die Verkettung von 4 Achsenspiegelungen ist eine Drehung oder eine Verschiebung.
- Die Verkettung von 4 Achsenspiegelungen lässt sich stets ersetzen durch die Verkettung von 2 (geeigneten) Achsenspiegelungen.

Weiterer Beweis für den Dreispiegelungssatz (Satz 2.11):

Reduktion der Anzahl der Achsenspiegelungen *schrittweise*.

Sei  $n$  die Anzahl der Achsenspiegelungen,  $n > 4$ .

$$\begin{aligned} S_1 \circ S_2 \circ S_3 \circ S_4 \circ \dots \circ S_n &= \\ (S_1 \circ S_2 \circ S_3 \circ S_4) \circ \dots \circ S_n &= \\ (S'_1 \circ S'_2) \circ \dots \circ S_n & \text{ wobei } S_1 \circ S_2 \circ S_3 \circ S_4 = S'_1 \circ S'_2 \\ & \text{(wegen Satz 2.14)} \end{aligned}$$

⇒ für  $n \geq 4$  lässt sich die Anzahl der Achsenspiegelungen schrittweise um jeweils 2 reduzieren.

⇒ stets Reduktion auf maximal 1, 2 oder 3 Achsenspiegelungen möglich.