

Einführung in die Geometrie

SS 2005

Prof.Dr.R.Deissler

Lizenz für **DynaGeo-Version ab 2.4** :

Lizenzdatei

PdagogischeHochschule01.dgl

vom "Schwarzen Brett"

**Schwarzes_Brett\Mathematik und Informatik\Deissler\Geometrie\
Geometrie_SS2005\DynaGeo+Lizenzdatei-PHFR**

(Nur für Studierende der PH-Freiburg zugänglich)

oder über die Geometrieseite meiner Homepage

http://home.ph-freiburg.de/deissler/geo1_05.htm

(Nur für Studierende der PH-Freiburg zugänglich)

laden und in das DynaGeo-Verzeichnis kopieren

DynaGeo – EUKLID Homepage:

<http://www.dynageo.de/>

Demoversion starten und "Hilfe/registrieren" wählen.
Die Demoversion wird dadurch zur lizenzierten Version.

Sie dürfen diese Lizenz privat solange nutzen, wie Sie an der PH studieren (wie an der Schule eine erweiterte Schullizenz).

DynaGeo – EUKLID Homepage:

<http://www.dynageo.de/>

Euklid-Info 2.4+

**Lizenz für DynaGeo – EUKLID
während des Studiums an der PH-Freiburg**

Lizenz für **Euklid-Version bis 2.3** :

????????????????????
?????????????
?????????????
Lizenz-Nr. ??????????

Daten in eine neu aus dem Internet heruntergeladene **Euklid-Version bis 2.3** eingeben. Aus der Demoversion wird dann eine lizenzierte Version.

Euklid-Info 2.3

Literatur

Kirsche, Peter

Einführung in die Abbildungsgeometrie
Kongruenzabbildungen und Ähnlichkeiten (Mathematik-ABC für das Lehramt)
Teubner, Stuttgart 1998

Noch am ehesten besten für die Vorlesung geeignet.

Mitschka, A. ; Strehl , R.; Hollmann, E.

Einführung in die Geometrie
Grundlagen, Kongruenz- und Ähnlichkeitsabbildungen.
Franzbecker, Hildesheim 1998

Für Vorlesungen für Lehramtsstudenten, gut zum Nachlesen, etwas alt, nicht immer ganz einfach.

Stein, Martin

Geometrie (Mathematik Primarstufe)
Spektrum, Akad. Verl., Heidelberg 1999

Für Vorlesungen für Grundschullehrer geschrieben, aber weicht stark von unserem Zugang ab.

Für unsere Vorlesung: Ornamente und Parkette; Sätze über Dreiecke, Vierecke und Kreise. Darüber hinaus eine axiomatische Entwicklung der euklidischen Geometrie.

Literatur 1

Scheid, Harald

Elemente der Geometrie
BI-Wiss.-Verl., Mannheim 1991

Für Vorlesungen für Lehramtsstudenten. Sehr umfangreich, tiefer gehend, gut zum Nachschlagen.

Wittmann, Erich

Elementargeometrie und Wirklichkeit
Vieweg, Braunschweig 1987

Sehr umfassend. Viele interessante geometrische Sachverhalte, sehr gut zum Nachschlagen. Anspruchsvoll aber gut verständlich.

Kratz, Johannes

Zentrale Themen des Mathematikunterrichts aus didaktischer Sicht
Bayerischer Schulbuchverlag, München 1993

Elementargeometrie und Didaktik der Geometrie

Literatur 2

DIFF- Heft Elementargeometrie

DIFF Tübingen 1974

Sehr alt, gibt sorgfältige, korrekte aber sehr abstrakte Einführung in ein Axiomensystem für die Geometrie.

Hat man früher von Lehrern der SI verlangt!

Wer's genau wissen will, kann hier nachlesen.

Franke, Marianne

Didaktik der Geometrie

Spektrum Verlag, Heidelberg 2000

Didaktik der Geometrie, nur für die Grundschule. Viel theoretischer Hintergrund und empirische Daten.

Weigand, H.-G., Weth, Th.,

Computer im Mathematikunterricht

Spektrum, Akad. Verl., Heidelberg 2002

Kapitel über Geometrie (S.155-228), im Wesentlichen über den Einsatz von DGS im Unterricht.

Literatur 3

Geometrievorlesungen im Internet**Rinkens, H.D.**

Elemente der Geometrie

<http://math-www.uni-paderborn.de/~rinkens/veranst/elgeo2001/index.html>

Gut verständlich, Inhalte vergleichbar mit denen unserer Vorlesung.

Elemente der Geometrie (Hauptschule) - SS 2000

http://www.didmath.ewf.uni-erlangen.de/Vorlesungen/Geometrie_HS/Geo_2000/index2.htm

Gut verständlich, Inhalte vergleichbar mit denen unserer Vorlesung.

Literatur 4

Hintergrund – Geschichte - Grundbegriffe

Vom Wesen der Geometrie

Empirische Wissenschaft

Erfahrungswissenschaft
wie die Physik

Experimente,
Beobachtungen,

Aussagen über die Natur

Deutung der Theorie in der Welt

Schule,
Alltag,
Technik

Formal-logische Theorie

Keine Begründung durch Erfahrung,
keine anschaulichen Argumente

Formale Ableitung von Sätzen nach
Regeln der Logik aus **Axiomen**
(nicht weiter begründetes System von
Grundtatsachen)

Anschauung nur als *Hinweis* auf
Beweisführungen

Grundlage für Theorien der Physik

Hochschulmathematik
Vermittlung der Idee des Beweisens
auch in der Schule
(sogenanntes lokales Ordnen)

Die Personen



Axiomatische Methode:

Begonnen von
Euklid **300 v.Chr.**

Buch „Elemente“

Die Personen

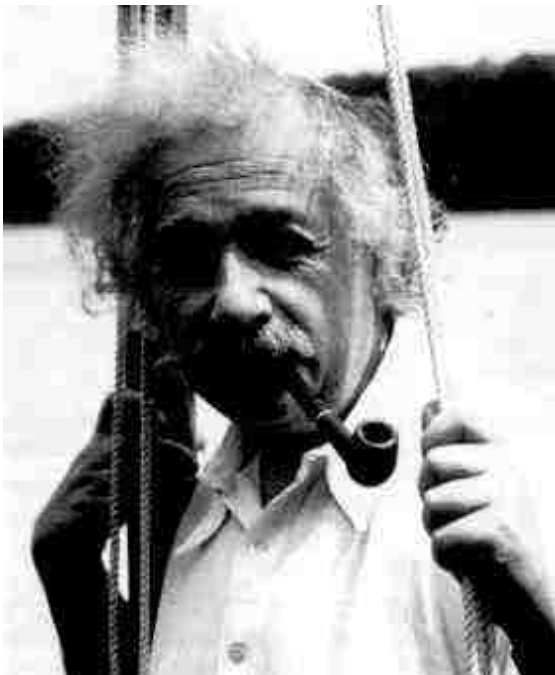


Axiomatische Methode:

Vollendet von
David Hilbert **1900 n.Chr.**

**Buch „Grundlagen der
Geometrie“**

Die Personen

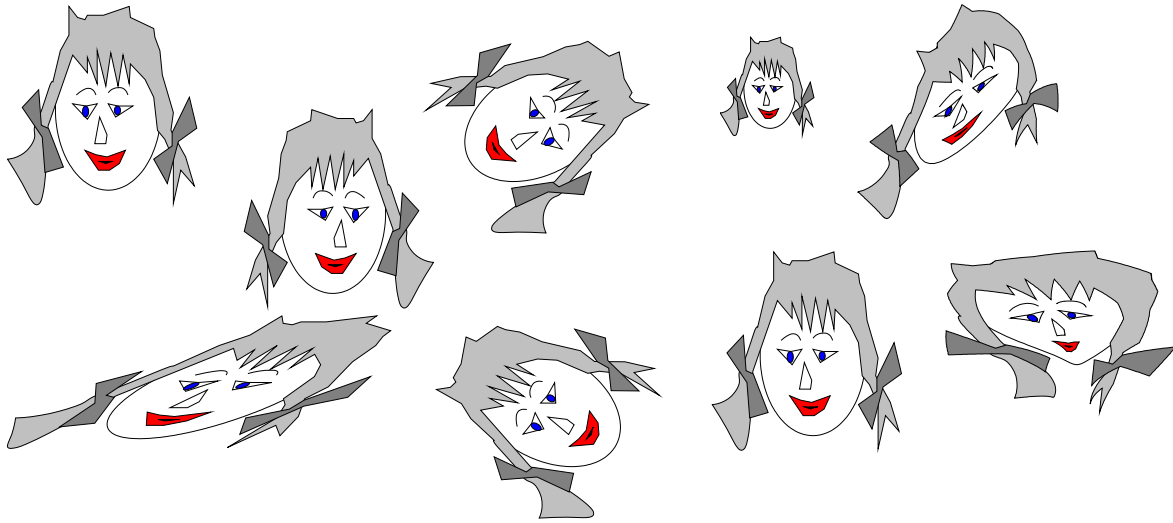


„Insofern sich die Sätze der
Mathematik auf die Wirklichkeit
beziehen, sind sie nicht sicher,
und insofern sie sicher sind,
beziehen sie sich nicht auf die
Wirklichkeit.“

Albert Einstein,
Geometrie und Erfahrung

Abbildungen – wozu?

Welche der unten erscheinenden Gesichter sind einander „gleich“?



Was kann Gleichheit bedeuten?

Abbildungen – wozu?

Abbildungen – wozu?

Welche der unten erscheinenden Gesichter sind einander „gleich“?



Alles sind Abbildungen
mit Hilfe eines
Graphikprogramms

Was kann Gleichheit bedeuten?

Abbildungen 2

Die Antwort:

Das hängt davon ab, ob man Figuren als „gleich“ bezeichnet, die

- identisch sind,
- durch Drehungen und Verschiebungen auseinander hervorgehen,
- durch Drehungen, Verschiebungen und Spiegelungen auseinander hervorgehen
- durch noch allgemeinere Abbildungen auseinander hervorgehen.

In der Schulgeometrie meint man meist, eine Figur sei eindeutig bestimmt, wenn sie *bis auf Kongruenzabbildungen* eindeutig festgelegt ist.

Daher werden wir in der Vorlesung *Abbildungen* der Ebene in sich untersuchen.

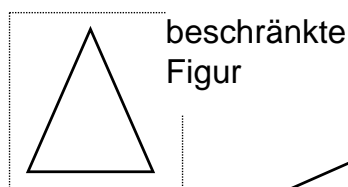
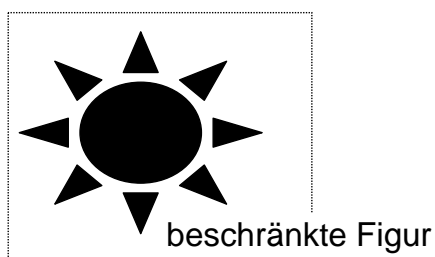
Abbildungen 3

Definitionen und Sprechweisen

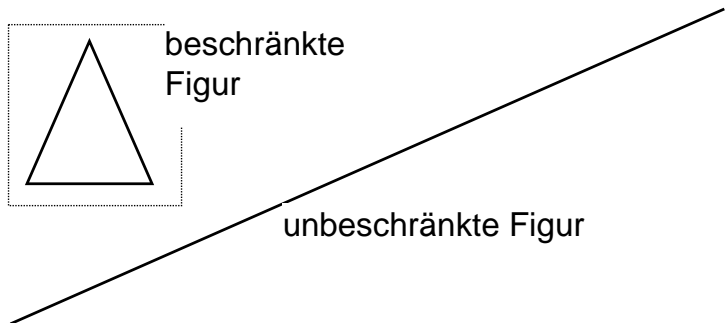
E ist die Anschauungsebene (Zeichenebene)

Eine **Figur F** ist eine nichtleere Teilmenge F der Ebene E

Figur F heißt **beschränkt**, wenn sie ganz in ein Rechteck eingeschlossen werden kann



unbeschränkte Figur



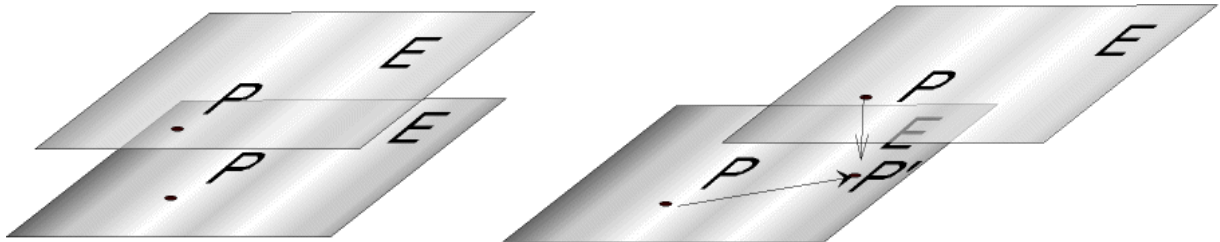
Definitionen 1

Abbildungen der Ebene in sich

Eine **Abbildung f der Ebene E in E** ist eine Zuordnung, die jedem Punkt P der Ebene E eindeutig einen Bildpunkt P' zuordnet.

$f: E \rightarrow E$ f bildet E in E ab
 $f: P \mapsto P'$ f bildet den Punkt P auf den Punkt P' ab

Beispiel: Verschiebung der Ebene mit Hilfe einer Transparent-Folie



Jedem Punkt P der verschobenen Ebene wird der darunter liegende Punkt P' zugeordnet. Dies gibt eine Abbildung von E in E .

Abbildungen der Ebene

Abbildungen, Funktionen allgemein

Eine **Abbildung f der Menge A nach B** ist eine Zuordnung, die jedem Element $x \in A$ eindeutig ein Bildelement $y \in B$ zuordnet.

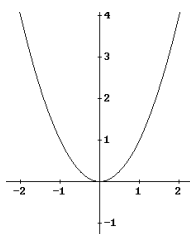
$f: A \rightarrow B$ f bildet A nach B ab
 $f: x \mapsto y$ f bildet das Element x auf das Element y ab

Beispiele aus dem Bereich der Zahlen:

$$f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$$

$$f: x \mapsto x^2$$

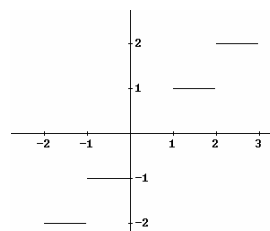
$$f: -7 \mapsto ?$$



$$g: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$$

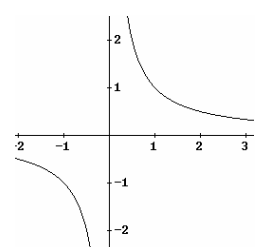
$$g: x \mapsto \text{größte ganze Zahl } \leq x$$

$$g: 2,3 \mapsto$$



$$h: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$$

$$h: x \mapsto \frac{1}{x}$$

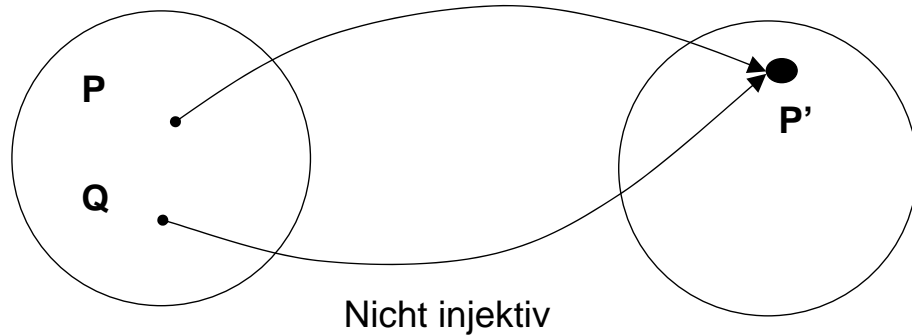


Abbildungen allgemein



Injektive Abbildungen

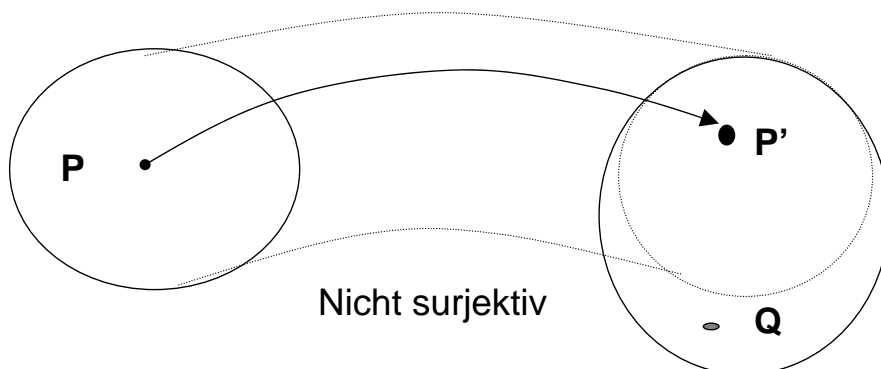
Eine Abbildung heißt **injektiv**, wenn keine zwei verschiedenen Punkte den gleichen Bildpunkt besitzen .



Injektiv

Surjektive Abbildungen

Eine Abbildung heißt **surjektiv**, wenn jeder Punkt aus E als Bildpunkt vorkommt.

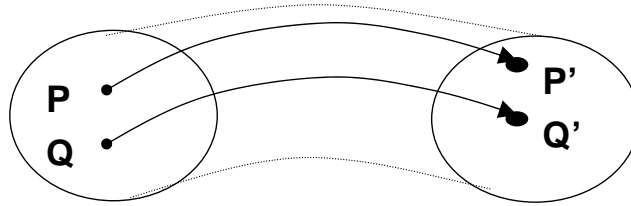


Q kommt nicht als Bildpunkt vor

Surjektiv

Bijektive Abbildungen

Eine Abbildung heißt **bijektiv**, wenn sie **injektiv** und **surjektiv** ist.



Keine zwei verschiedenen Punkte haben gleiche Bildpunkte

Alle Punkte kommen als Bildpunkte vor

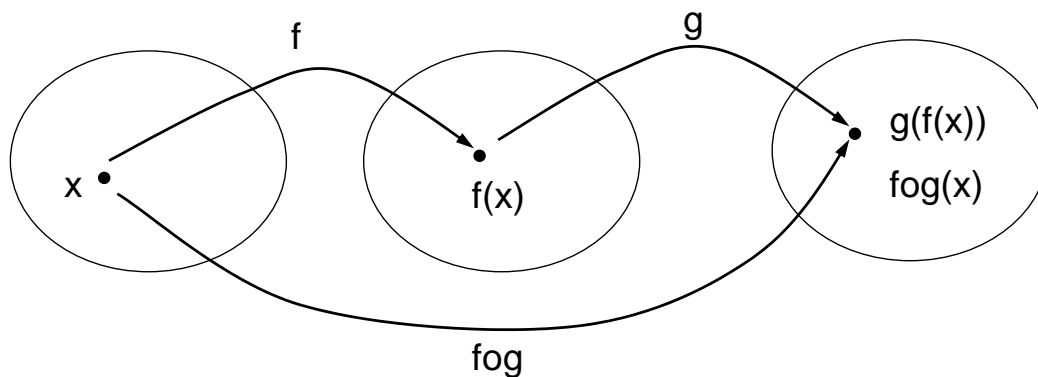
bijektiv

Hintereinanderausführen von Abbildungen $E \rightarrow E$

Definition:

Es seien $f: E \rightarrow E$ und $g: E \rightarrow E$ Abbildungen der Ebene E in sich.

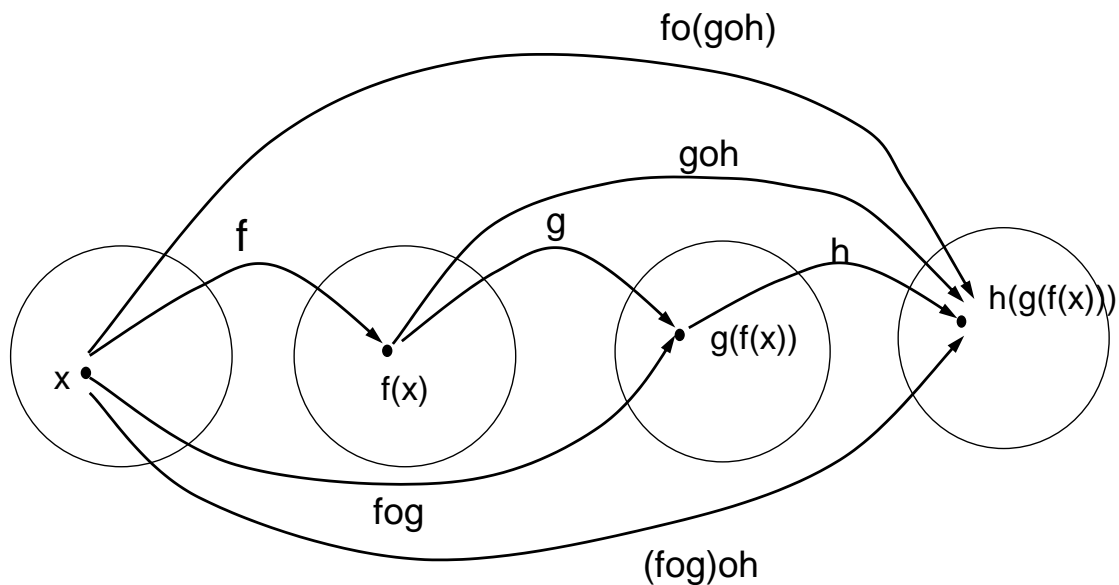
Die **Verkettung** $f \circ g: E \rightarrow E$ wird erklärt durch $f \circ g(x) = g(f(x))$
Zuerst wird f ausgeführt; auf das Ergebnis $f(x)$ wird g angewandt!



Statt Verkettung sagt man auch Hintereinanderausführung oder Produkt

Satz 1.1

- a) Assoziativgesetz $(f \circ g) \circ h = f \circ (g \circ h)$
- b) Das Kommutativgesetz gilt nicht: im Allgemeinen ist $f \circ g \neq g \circ f$ (Begründung?)

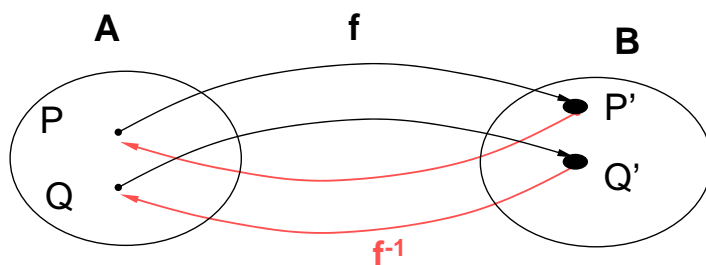


Verkettung 2

Inverse einer Abbildung

Definition:

Ist f eine bijektive Abbildung $A \rightarrow B$, dann kann man f umkehren, d.h. jedem Bildpunkt wird sein eindeutig bestimmter Urbildpunkt zugeordnet. Die so definierte Abbildung wird mit f^{-1} bezeichnet und **Inverse zu f** oder Umkehrabbildung zu f genannt.



Jedem Bildpunkt P' wird durch f^{-1} sein Urbild P zugeordnet

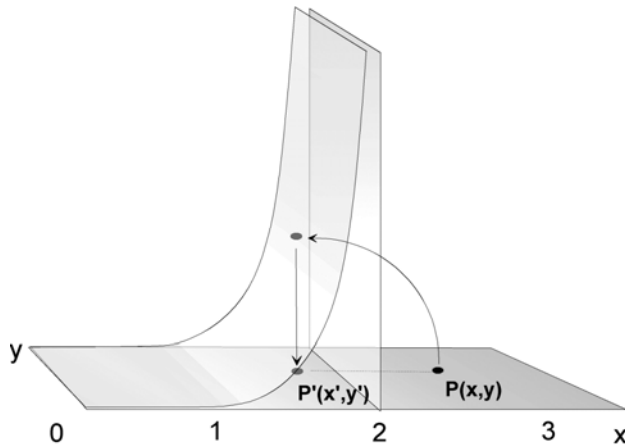
Es gilt: $f \circ f^{-1} = id_A$ und $f^{-1} \circ f = id_B$

id_A und id_B sind die **identischen Abbildungen** auf A bzw. auf B .

Für id_A ist $f \circ id_A = id_A \circ f = f$ für alle Abbildungen f von A nach A .

Beispiele für Abbildungen in der Ebene

Durch folgendes Bild wird eine Abbildung von E nach E definiert (Transparentfolie).



$$f(x, y) = \begin{cases} (x, y) & \text{für } x \leq 1 \\ \left(2 - \frac{1}{x}, y\right) & \text{für } x > 1 \end{cases}$$

Welche Eigenschaften von Abbildungen liegen vor: injektiv, surjektiv, bijektiv?

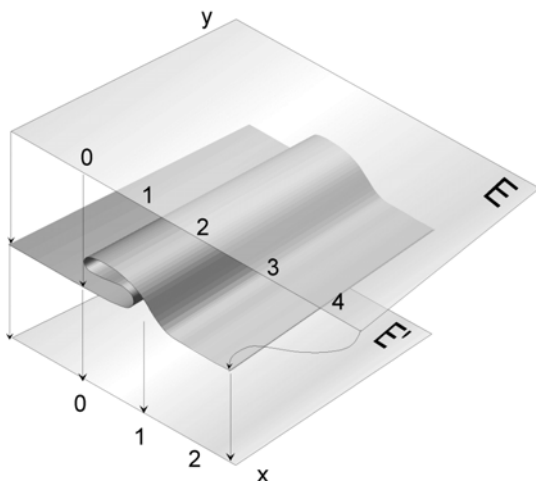
Worauf werden Geraden abgebildet? Skizzieren!

Prüfen Sie an ausgewählten Punkten, dass durch die nebenstehende Vorschrift eine solche Abbildung angegeben wird.

Beispiele Abb.1

Beispiele für Abbildungen in der Ebene

Durch folgendes Bild wird eine Abbildung von E nach E definiert (Transparentfolie).



$$(x, y) \mapsto \begin{cases} (x, y) & \text{für } x \leq 1 \\ (2 - x, y) & \text{für } 1 < x \leq 2 \\ (x - 2, y) & \text{für } x > 2 \end{cases}$$

Welche Eigenschaften von Abbildungen liegen vor: injektiv, surjektiv, bijektiv?

Worauf werden Geraden abgebildet? Skizzieren!

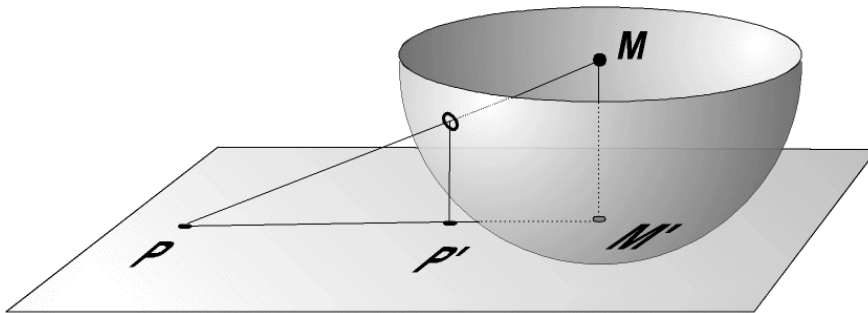
Prüfen Sie an ausgewählten Punkten, dass durch die nebenstehende Vorschrift eine solche Abbildung angegeben wird.

Beispiele Abb.2



Beispiele für Abbildungen in der Ebene

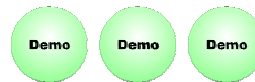
Durch folgendes Bild wird eine Abbildung von E nach E definiert.



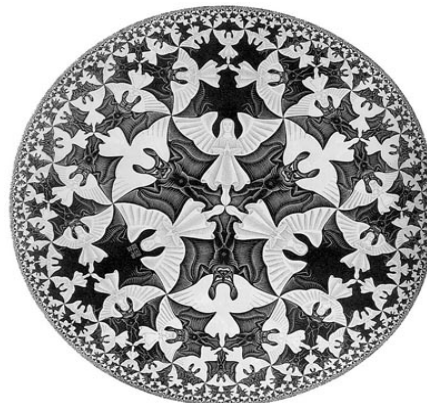
Welche Eigenschaften von Abbildungen liegen vor: injektiv, surjektiv, bijektiv?

Worauf werden Geraden abgebildet? Skizzen!

Bei Formeln b.3



$f: ? \rightarrow$

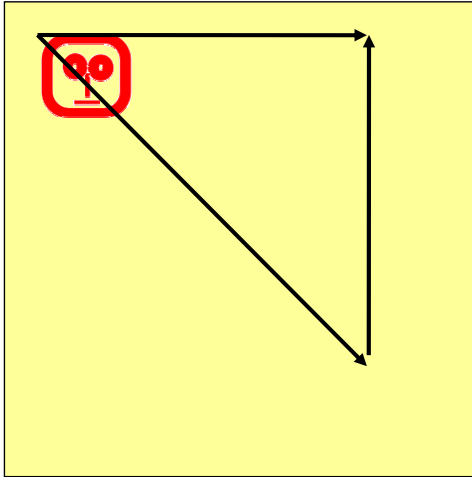


Können Sie in dem Bild eine Abbildung der Ebene in sich erkennen? Beschreiben Sie diese Abbildung. Wie wird sie gewonnen?

Welche Eigenschaften von Abbildungen liegen vor: injektiv, surjektiv, bijektiv?

Worauf werden Geraden abgebildet?

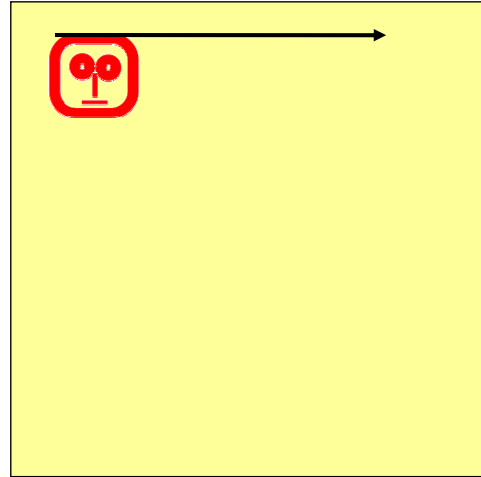
Abbildungsbegriff in der Mathematik



Physik, Technik, bei der Oma

Der Weg ist bedeutsam
„s' gibt Kratzer im Parkett!!!“

Die Verkettung der beiden
Verschiebungen *kann ersetzt*
werden durch eine Verschiebung.



Mathematik

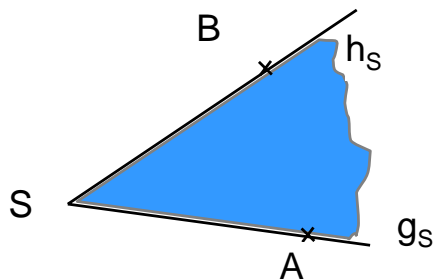
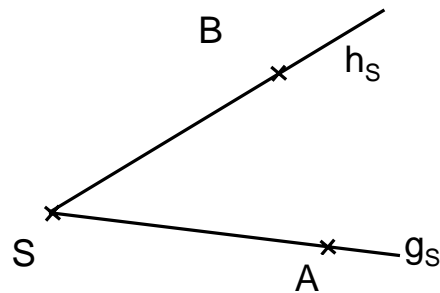
Nur das Ergebnis ist bedeutsam

Die Verkettung der beiden
Verschiebungen *ist eine*
Verschiebung.

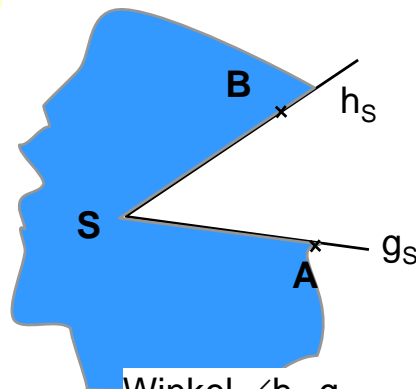
Abbildungsbegriff Mathematik

Winkelbegriffe

Zwei Halbgeraden g_s und h_s mit
gemeinsamem Anfangspunkt S bilden
eine **Winkelfigur**. Diese Winkelfigur
legt zwei **Winkelfelder** fest, ein
inneres und ein äußeres, wenn die
Halbgeraden nicht auf einer Geraden
liegen.

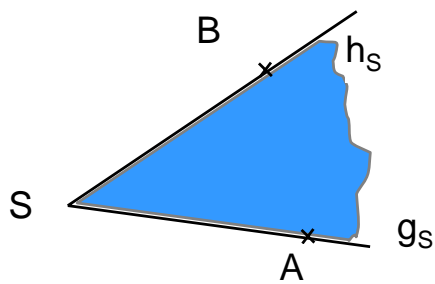


Winkel $\angle g_s, h_s$
Winkel $\angle ASB$

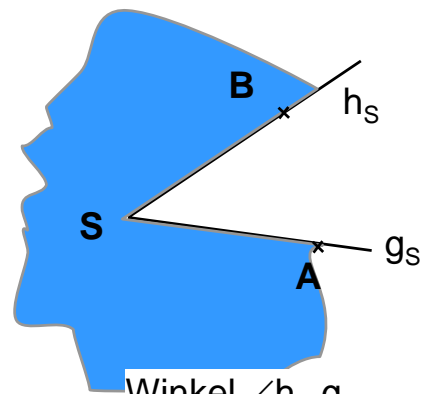


Winkel $\angle h_s, g_s$
Winkel $\angle BSA$

Winkelbegriff 1



Winkel $\angle g_s, h_s$
Winkel $\angle ASB$



Winkel $\angle h_s, g_s$
Winkel $\angle BSA$

Zur Unterscheidung:  Orientierung von Winkeln

$\angle g_s, h_s$: Das Winkelfeld, das überstrichen wird, wenn g_s im **Gegenuhrzeigersinn** um S auf h_s **gedreht** wird

Winkelmessung in Grad.

Keine Orientierung, nur positive Winkel.

Keine Unterscheidung von Winkel und Winkelmaß.

Winkelbegriff 2

Winkelmaße nehmen nur Werte aus dem Bereich $[0^\circ, 360^\circ]$ an.

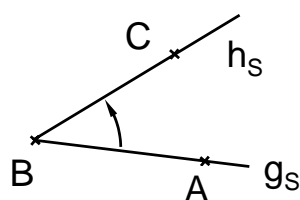
Ein Winkel von 360° ist gleich groß wie ein Winkel von 0° .

Winkelfelder werden stets im mathematisch positiven Sinn notiert.

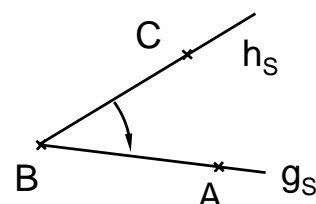
Technische oder physikalischen Anwendungen

Bei Drehungen ist der Verlauf der Drehung von Bedeutung

 wichtig, **orientierte Winkel** zu betrachten.



positiver orientierter Winkel



negativer orientierter Winkel

Winkelbegriff 3

Winkelmaße mit Werten größer als 360°

Umdrehung eines Karussells mit -900° :

Das Karussell hat sich zweieinhalb mal im Uhrzeigersinn gedreht.

Wir benutzen in der Geometrie auch negative Winkel und Winkel mit Maßen über 360° , um intuitive Bezeichnungen zu ermöglichen und Berechnungen zu erleichtern.

Diese Winkel sind aber stets **gleich** einem nicht orientierten Winkel mit Maß aus dem Bereich $[0^\circ, 360^\circ[$.

Winkelbegriff 4

Dynamische Geometrie Systeme

Winkelbezeichnung ohne Orientierung:



Unterscheidung zwischen innerem und äußerem Winkelfeld nicht möglich.

„DynaGeo“ Grundeinstellung:

Wählen, ob Winkelorientierung berücksichtigt wird oder nicht.

Ohne Orientierung können dann nur Winkel zwischen 0° und 180° gemessen werden.

Winkelbegriff 5

Parallele Geraden

Es gibt mehrere Möglichkeiten, Parallelität von Geraden zu definieren.

Definition:

Zwei Geraden g und h heißen **parallel**, wenn sie beide auf einer dritten Geraden k senkrecht stehen.

Wir schreiben dafür $g \parallel h$.

Nach dieser Definition gilt insbesondere $g \parallel g$!

Unter Voraussetzung von genügend vielen Axiomen kann man folgern:

$g \parallel h$ und $g \neq h \Leftrightarrow g$ und h haben keinen gemeinsamen Punkt.

$g \parallel h \Leftrightarrow g$ und h haben überall den gleichen Abstand.

Diese beiden Eigenschaften könnte man auch zur Definition von Parallelität verwenden.

Wie lautet die Definition in diesen Fällen?

Parallele

Einige Bemerkungen zur „Axiomatik“

Wir wollen hier keine axiomatische Geometrie betreiben, wollen aber unter Verwendung von hinreichend vielen nicht weiter begründeten Voraussetzungen, geometrische Sätze beweisen.

Diese Voraussetzungen können wir als Axiome auffassen

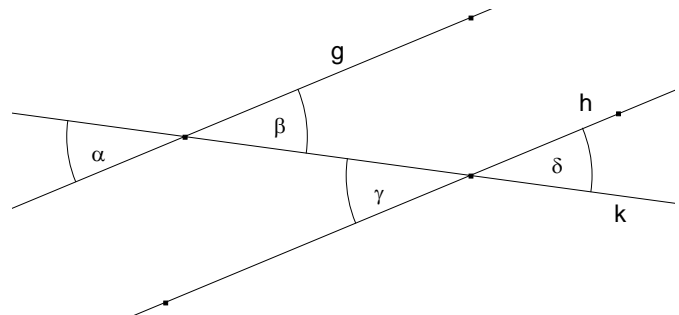
Folgende Sachverhalte, die wir immer wieder im Sinne von Axiomen verwenden wollen, sollen hier noch einmal kurz festgehalten werden.

Winkel an geschnittenen Parallelen

Die Parallelen g, h , $g \neq h$, werden von einer Geraden k geschnitten.

Dann sind

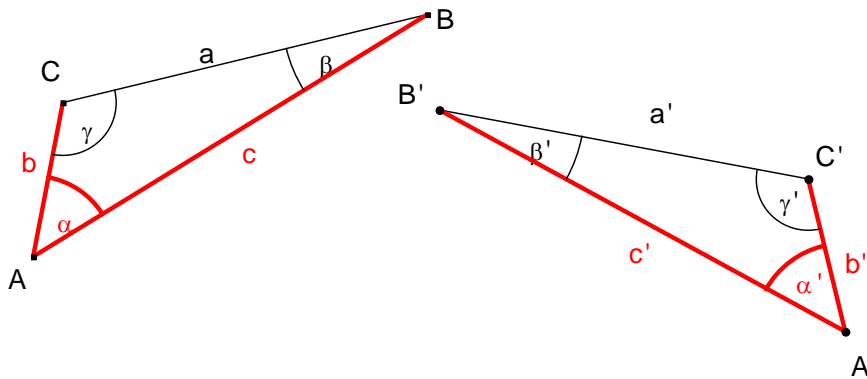
- die *Stufenwinkel* α und γ gleich groß,
- die *Wechselwinkel* β und γ bzw. α und δ gleich groß



Sätze über die Größe von Seitenlängen und Winkelgrößen in Dreiecken (Kongruenzsätze)

Die aus der Schule geläufigen „**Kongruenzsätze**“ in der folgenden Form („sws“ als Beispiel):

Stimmen zwei Dreiecke in zwei Seiten(längen) und der Größe des eingeschlossenen Winkels überein, dann stimmen sie auch in allen anderen Seitenlängen und Winkelgrößen überein.



Zur „Axiomatik“ 2

Konstruktionen mit Zirkel und Lineal

Wenn wir von „Konstruktionen“ sprechen, dann meinen wir stets „Konstruktionen mit Zirkel und Lineal“.

Dabei versteht man unter einem Lineal ein Gerät ohne Skaleneinteilung, nur zum Zeichnen gerader Linien.

Bei Konstruktionen mit Zirkel und Lineal dürfen nur die folgenden Schritte durchgeführt werden:

Konstruktionen mit Zirkel und Lineal

1. Beliebigen **Punkt** zeichnen.
2. Beliebigen **Punkt auf** einer Geraden, Strecke oder Kreislinie zeichnen.
3. **Gerade durch zwei Punkte** zeichnen (Lineal).
4. **Zwei Punkte** durch eine **Strecke** verbinden(Lineal).
5. **Schnittpunkte** von Geraden, Strecken und Kreislinien zeichnen.
6. **Kreis um** einen gegebenen **Mittelpunkt M durch** einen weiteren **Punkt P** zeichnen (Zirkel).
7. **Kreis um** einen gegebenen **Mittelpunkt M mit** einem **Radius** zeichnen, der **von zwei** (schon konstruierten oder gegebenen) **Punkten** übernommen werden kann (Zirkel).
"Radius aus der Zeichnung in den Zirkel übernehmen und damit einen Kreis zeichnen".

Zirkel und Lineal 2

Konstruktionen mit Zirkel und Lineal

Wenn wir davon sprechen, eine Streckenlänge oder ein Winkelmaß sei gegeben, dann meinen wir, dass ein Objekt mit diesen Maßen vorgegeben ist, es also nicht konstruiert werden muss. Gegebene Streckenlängen und Winkel müssen prinzipiell mit Zirkel und Lineal übertragen werden, dürfen also nicht abgemessen werden.

Nachdem einige Grundkonstruktionen mit Zirkel und Lineal als durchführbar erkannt wurden, lassen wir diese als „Module“ in späteren Konstruktionen zu. Sie werden in Konstruktionsbeschreibungen als Ganzes aufgeführt.

Zirkel und Lineal 3

Konstruktionen mit Zirkel und Lineal

Bei der Durchführung einer Konstruktion dürfen dafür auch die üblichen Zeichenhilfsmittel verwandt werden:

- Senkrechte zu Geraden oder Strecken durch einen Punkt
→ Geodreieck.
- Parallele zu Geraden oder Strecken durch einen Punkt → Geodreieck.
- Abtragen einer gegebenen Streckenlänge auf einer Geraden → Lineal mit Maßstab.
- Übertragen einer gegebenen Winkelgröße an eine Gerade in einem Punkt → Winkelmesser.

In „Euklid“ stehen Hilfsmittel für diese Grundkonstruktionen ebenfalls zur Verfügung.

Zirkel und Lineal 4

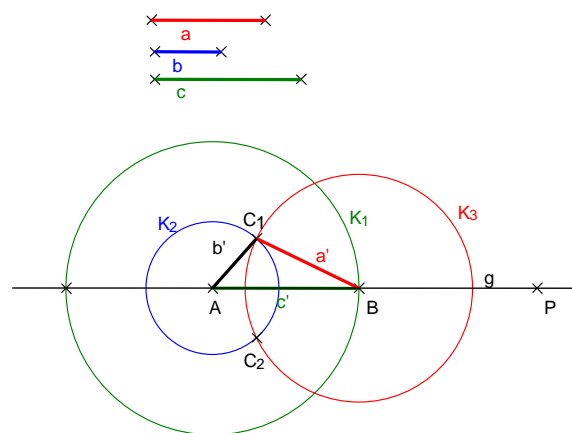
Beispiel einer Konstruktion mit Zirkel und Lineal

Gegeben: a , b , c .

Konstruiere das Dreieck ABC mit den Seitenlängen a , b , c .

Konstruktionsbeschreibung:

- Punkt A
- Gerade g durch A
- K_1 ist ein Kreis um A mit Radius c
- B ist ein Schnittpunkt der Geraden g mit Kreis K_1
- K_2 ist ein Kreis um A mit Radius b
- K_3 ist ein Kreis um B mit Radius a
- C_1 ein Schnittpunkt der Kreise K_2 und K_3
- C_2 2. Schnittpunkt der Kreise K_2 und K_3
- c' ist die Strecke $[A; B]$
- a' ist die Strecke $[B; C_1]$
- b' ist die Strecke $[C_1; A]$



Zirkel und Lineal 5

Beispiel einer Konstruktion mit Zirkel und Lineal

Gegeben: a, b, c .

Konstruiere das Dreieck ABC mit den Seitenlängen a, b, c .

Konstruktionsbeschreibung kurz:

- Strecke $\overline{AB} = c$
- $K_2(A, b)$
- $K_3(B, a)$
- C_1 ein Schnittpunkt K_2, K_3
- C_2 der 2. Schnittpunkt K_2, K_3
- $C = C_1$ oder $C = C_2$
- Dreieck ABC

