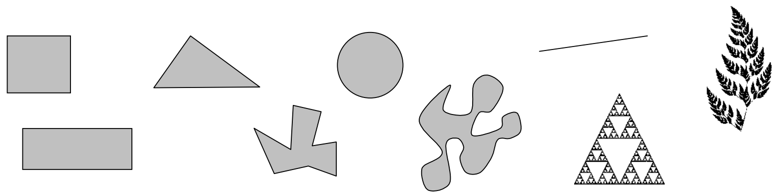
Kapitel 8: Der Flächeninhalt

- Flächeninhalt einer Figur soll etwas über deren Größe aussagen
- Flächeninhaltsbegriff intuitiv „irgendwie klar",
- ab der Grundschule durch Auslegen von Figuren mit Plättchen vorbereitet .
- Abgrenzung gegenüber einem anderen Begriff von Größe, dem Umfang einer Figur.

Definitionen des Flächeninhaltsbegriffs werden immer mehr verfeinert, durch den Messprozess festgelegt.

Welchen Figuren sind Sie bereit, einen „Flächeninhalt" zuzusprechen?
Wie sollte der definiert und gemessen werden?



„Flächeninhalt bestimmen" bedeutet :
Möglichst vielen Figuren F (Maß-)Zahl A(F) zuordnen.

Eigenschaften dieser Zuordnung:

- $A(F) \geq 0$ für alle Figuren F,
- $A(F_1 \cup F_2) = A(F_1) + A(F_2)$ $F_1 \cap F_2 = \emptyset$,
- $A(F) = A(F')$ F' kongruent zu F,
- $A(Q_e) = 1$ Q_e beliebig gewähltes „Einheitsquadrat"

Theorie solcher Messprozesse in der Mathematik → „Maßtheorie", Teilgebiet der Analysis

Hier
- nur die in der Schulmathematik wichtigen Figuren behandelt,
- an einigen Beispielen angewandt ,
- statt den Flächeninhalt zu definieren beschreibt man den Messprozess.

8.1 Flächeninhalt als Größe

- Im Alltagsgebrauch keine Figuren mit Flächeninhalt 0 akzeptiert (z.B. einzelne Punkte, Strecken)
- Ohne diese Flächen bilden die Flächeninhalte einen so genannten „Größenbereich"
  (→ Vorlesung über Größenbereiche).

In einem Größenbereich G sind Addition **+** und Kleiner-Relation **<** erklärt:

- $a + b = b + a$ Kommutativgesetz
- $(a + b) + c = a + (b + c)$ Assoziativgesetz
- entweder $a < b$ oder $b < a$ oder $a = b$ Trichotomie
- $a < b \Leftrightarrow$ es gibt ein $c \in G$ mit $a + c = b$ eingeschränktes Lösbarkeitsgesetz

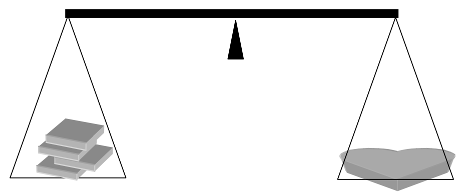
8.2 Der Messprozess

Physikalisches Modell:

- „Figuren" sind aus homogenem Material gleicher Dicke ausgeschnitten.
- Figuren haben gleichen Flächeninhalt wenn sie gleiches Gewicht haben.

Flächeninhalt von Figuren experimentell vergleichen:

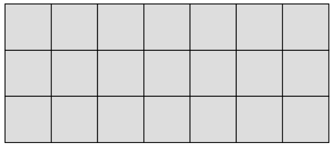
- Figuren aus geeignetem Material herstellen und Gewicht vergleichen.
- Flächenmaßzahlen zuordnen durch Vergleichen mit dem Gewicht von Einheitsquadraten.



Mathematische Flächeninhaltsbegriffe

- **Auslegen** einer Fläche mit zueinander deckungsgleichen Figuren und Anzahlbestimmung
(⇒ z.B. Inhaltsformel für Rechtecke, für die Schule geeignet und gebräuchlich).

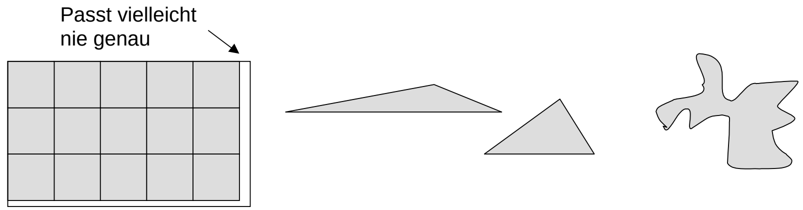
7 Quadrate im Streifen



3 Streifen

3·7 Einheitsquadrate

- Grenzen des Messprozesses durch Auslegen:
  - Theoretisch problematisch bei Rechtecken mit Seiten, die zu denen des Einheitsquadrates inkommensurabel sind,
  - Vergleich beliebiger Dreiecke,
  - krummlinig begrenzte Figuren.



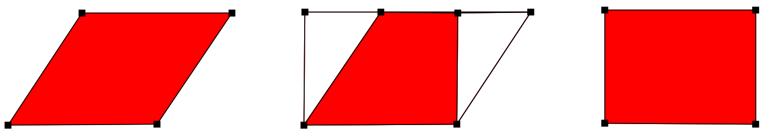
Begriffe **„Zerlegungsgleichheit“** und “ **Ergänzungsgleichheit**“ von Figuren.
Grenzprozesse durch Annäherung komplizierter Flächen durch einfachere (⇒ z.B. Kreisfläche).

8.2.1 Zerlegungsgleich - ergänzungsgleich

Definition
Zwei Figuren sind **zerlegungsgleich** wenn sie sich in paarweise kongruente Figuren zerlegen lassen.

- **Zerlegungsgleiche Figuren sind inhaltsgleich**

Beispiel: Flächeninhalt des Parallelogramms

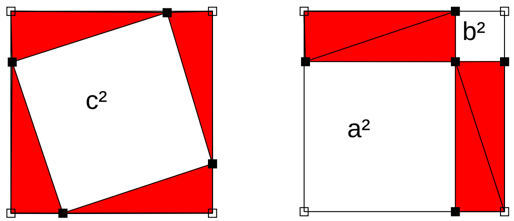


Das Parallelogramm und das Rechteck sind zerlegungsgleich.

Definition
Zwei Figuren sind **ergänzungsgleich** wenn sie durch Ergänzung mit kongruenten Figuren zu kongruenten (i.A. zerlegungsgleichen) Figuren ergänzt werden können.

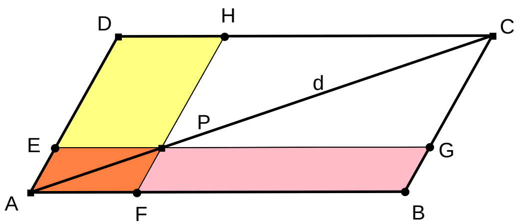
- **Ergänzungsgleiche Figuren sind inhaltsgleich**

Beispiel: Pythagoras-Legebeweis



Die weißen Flächen sind ergänzungsgleich, denn sie können durch Ergänzung mit den vier paarweise kongruenten Dreiecken zu kongruenten Figuren (hier den Quadraten) ergänzt werden.

Satz vom Ergänzungsparallelogramm



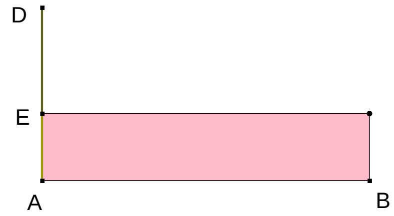
Der Satz
Gegeben ist das Parallelogramm ABCD und ein Punkt P auf der Diagonalen d=AC.
Durch P sind Parallelen zu den Seiten des Parallelogramms gezeichnet.
Dadurch entstehen zwei Parallelogramme EPHD (gelb) und FBGP (hellrot).

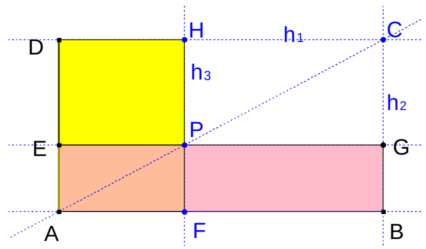
- Zeigen Sie, dass diese Parallelogramme den gleichen Flächeninhalt besitzen.
- Zeigen Sie, dass auch die Parallelogramme AFHD und ABGE den gleichen Flächeninhalt besitzen.

Anwendung

Gegeben ist ein Rechteck ABGE (hellrot).

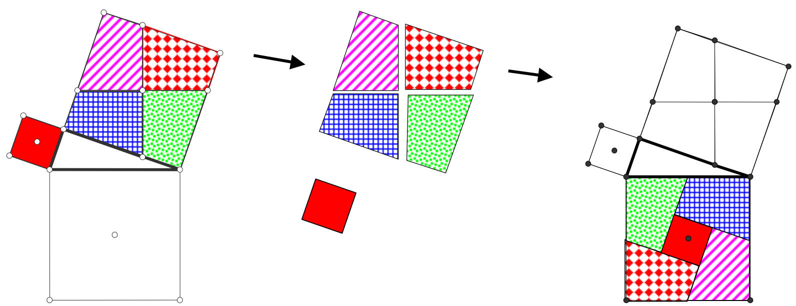
Es soll ein dazu flächengleiches Rechteck mit einer vorgegebenen Seite konstruiert werden.





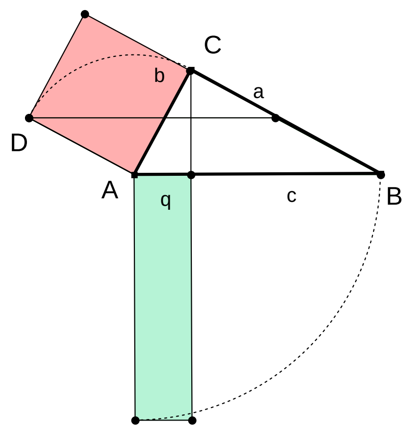
Konstruktion:
h_1 Parallele durch zu AB durch D, h_2 Parallele durch zu AD durch B,
C Schnittpunkt von h_1 und h_2, P Schnittpunkt von AC mit GE,
h_3 Parallele zu AD durch P, H Schnittpunkt von h_3 mit DC.
F Schnittpunkt von h_3 mit AB. AFHD ist das gesuchte Rechteck.

Pythagoras-Zerlegungsbeweis



Für die Schule als Puzzle geeignet, wenn man die Einteilung des Kathetenquadrats vorgibt.

Ein Beweis des Kathetensatzes



Wie ist wohl das karierte Parallelogramm konstruiert worden?

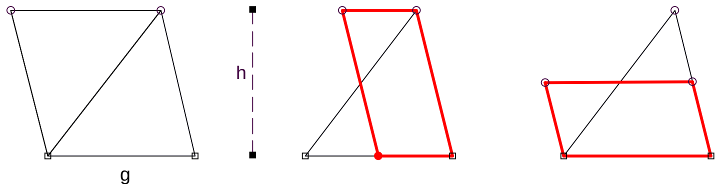
Wenn DA als Grundseite des Parallelogramms betrachtet wird, wie lang ist dann die zugehörige Höhe?

Was ist der Flächeninhalt des Parallelogramms?

Das Parallelogramm wird so um A gedreht, dass D auf C fällt. Um wie viel Grad?

Welcher Zusammenhang besteht mit dem Flächeninhalt des grünen Rechtecks?

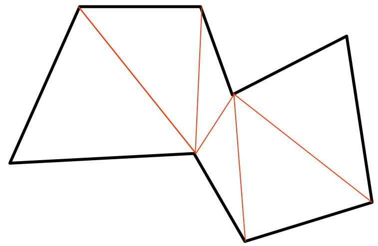
Dreiecksformeln und ihre geometrische Deutung



A= $\frac{gh}{2}$ A= $\frac{g}{2}h$ A= $g\frac{h}{2}$

Verschiedene Herleitungen führen zunächst zu verschiedenen Formen der Flächeninhaltsformeln → Termumformungen

8.2.2 Flächeninhalt von n-Ecken

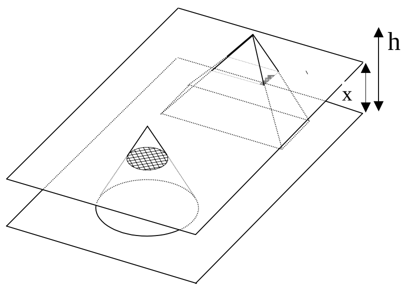


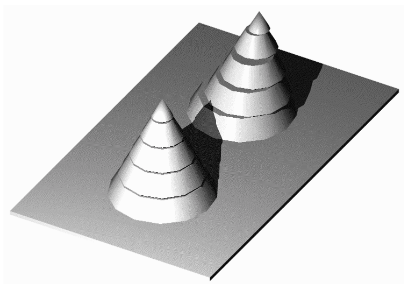
Flächeninhalt?

Zerlegen in Dreiecke, Dreiecksflächen berechnen!

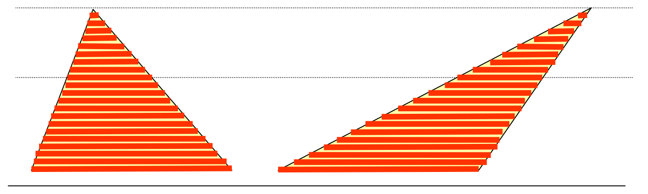
8.2.3 Das Prinzip von Cavalieri (1598 – 1647)

Satz von Cavalieri im Raum
Sind zwei Körper gleich hoch und ist in jeder Höhe die Schnittfläche bei beiden Körpern gleich groß, so haben die Körper dasselbe Volumen





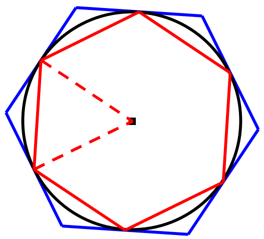
Satz Cavalieri in der Ebene
Kann man eine Gerade g so zeichnen, dass jede Parallele zu dieser Geraden aus zwei Flächen stets zueinander gleichlange Strecken ausschneidet, so haben die Flächen denselben Inhalt**.**



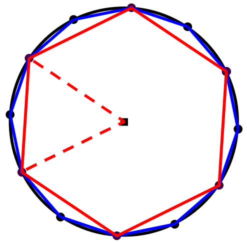
→ Dreiecke mit gleicher Grundseite und gleicher Höhe haben den gleichen Flächeninhalt (Strahlensatz).

8.2.4 Grenzprozesse

Beispiel: Flächeninhalt des Kreises



Ein- und umbeschriebenes Sechseck

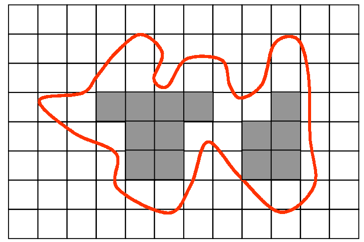


Einbeschriebenes Sechseck und Zwölfeck

Annäherung durch einbeschriebene und umbeschriebene regelmäßige n-Ecke.
Für $n \to \infty$ nähern sich deren Flächeninhalte von unten bzw. oben einem gemeinsamen Wert.
Diesen Wert **definiert** man als den Flächeninhalt des Kreises.

Ganz beliebige Figur

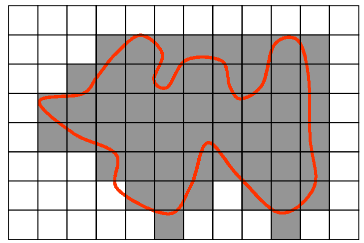
Flächeninhalt A ?



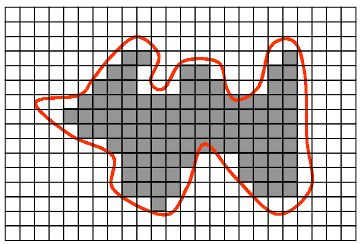
Gitterpapier drüber legen ...

Kästchen im Inneren zählen und addieren → I_1

$I_1 \leq A \leq U_1$



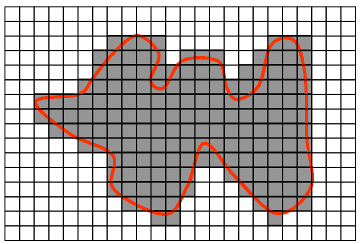
Kästchen außen zählen und addieren → U_1



Kästchenlänge halbieren ...

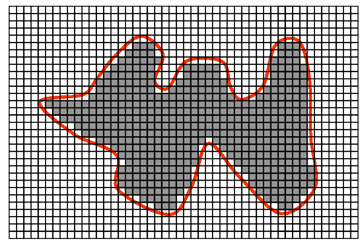
Kästchen im Inneren zählen und addieren → I_2

$I_1 \leq I_2 \leq A \leq U_2 \leq U_1$



Kästchen außen zählen und addieren → U_2

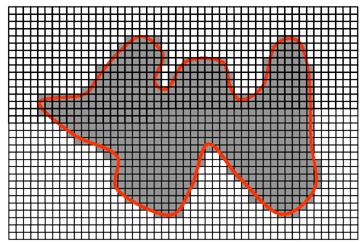
Falls I_n und U_n sich dem gleichen Wert A nähern, dann ist das der Flächeninhalt der Figur.



Kästchenlänge nochmals halbieren ...

Kästchen im Inneren zählen und addieren → I_4

$I_1 \leq I_2 \leq I_4 \leq A \leq U_4 \leq U_2 \leq U_1$

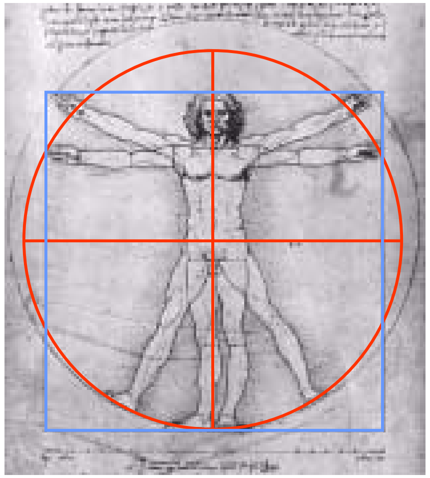


Kästchenaußen zählen und addieren → U_4

Intervallschachtelung für

Quadratur des Kreises: Ein altes griechisches Problem

Konstruiere mit Zirkel und Lineal zu einem Kreis mit gegebenen Radius ein flächengleiches Quadrat.



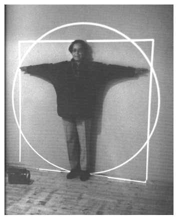
Leonardo da Vinci:
Studie zu den Proportionen am „idealen“ menschlichen Körper.
Quadraturproblem implizit dargestellt ?

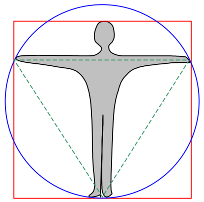
Kreis durch die Fingerspitzen der waagerecht ausgestreckten Arme und durch den zentralen großen Zeh.

Fast gleicher Flächeninhalt wie das Quadrat aus Körperhöhe und Breite der ausgestreckten Arme.

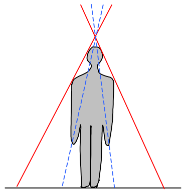
Beweis für die Unmöglichkeit der „Quadratur des Kreises“ erst um 1870 gelungen (F.Lindemann)!

Phänomena“ 1984 in Zürich
Esoterischer Autor : Der Mensch ist die Lösung des Unlösbaren!

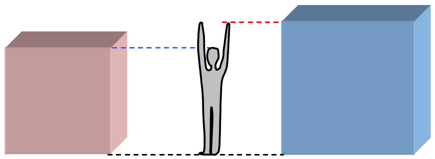




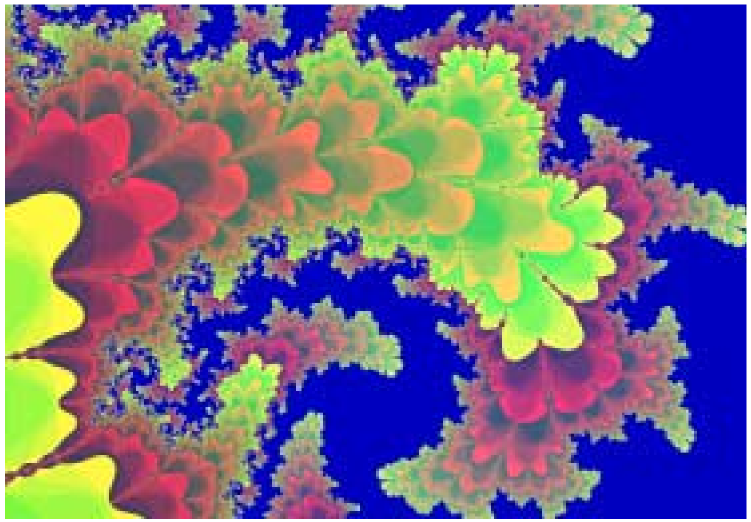
Quadratur des Kreises



Winkeldrittelung

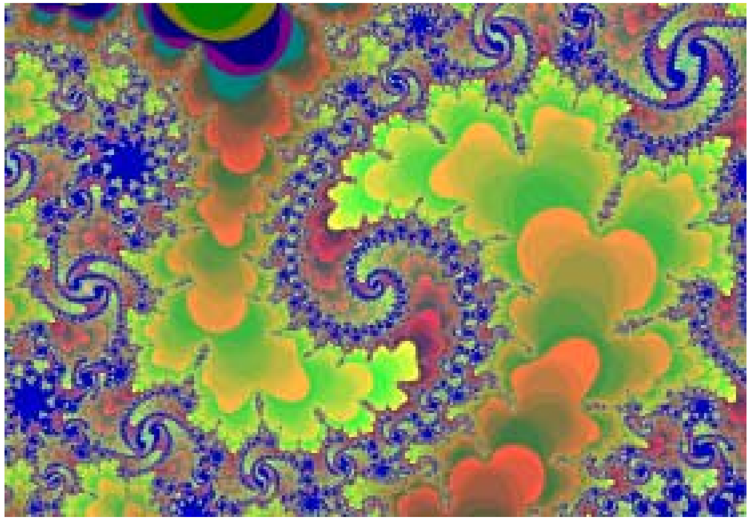


Würfelverdoppelung
(Delisches Problem)



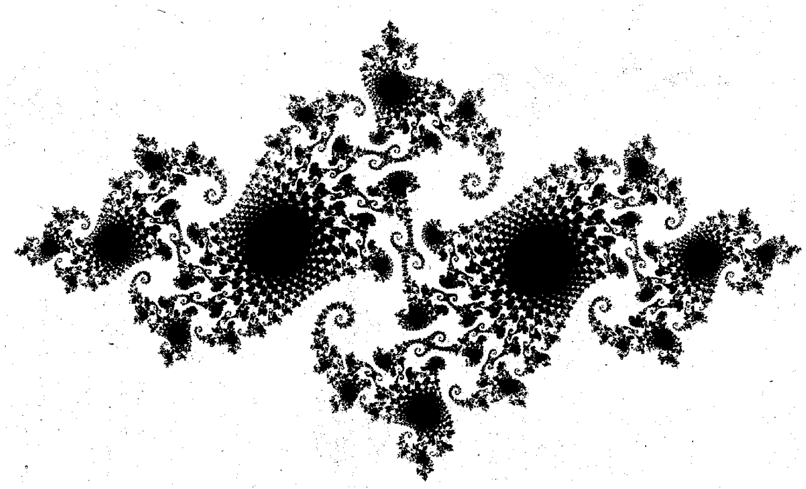
Flächeninhalt der blauen Fläche?

Problematische Figuren: **Fraktale**



Flächeninhalt der blauen Fläche?

Problematische Figuren: **Fraktale**



Flächeninhalt?