Kapitel 6: Deckabbildungen von Figuren - Symmetrie

6.1 Die Gruppe (K,o) aller Kongruenzabbildungen einer Ebene

K ist die Menge aller Kongruenzabbildungen $E \to E$;
o ist die „Hintereinanderausführung“ von Abbildungen

- K ist abgeschlossen unter o,
- das **Assoziativgesetz** gilt : $(f \circ g) \circ h = f \circ (g \circ h)$,
- „id“ ist **neutrales** Element; $id \in K$
  (id ist die identische Abbildung)
- mit jedem $f \in K$ ist auch das **inverse** Element $f^{-1} \in K$

Satz 6.1
(K,o) ist eine (unendliche) Gruppe.

Definition 6.1
Sei h eine Kongruenzabbildung der Ebene E und $F \subseteq E$ eine Figur in der Ebene.
Wenn h(F)=F ist, d.h. wenn **F invariant unter h** ist, dann nennt man **F h-symmetrisch**, und **h eine Deckabbildung** (Symmetrieabbildung) von F.

Satz 6.2
Sei $F \subseteq E$ eine (nicht notwendig beschränkte) Figur in der Ebene.
Dann ist die **Menge der Deckabbildungen** (Symmetrieabbildungen) **von F** eine **Untergruppe** von (K,o).

Aufgabe
Welches sind die Symmetrieabbildungen
- eines festen Punktes,
- einer Geraden?

Achsen- und drehsymmetrische Figuren

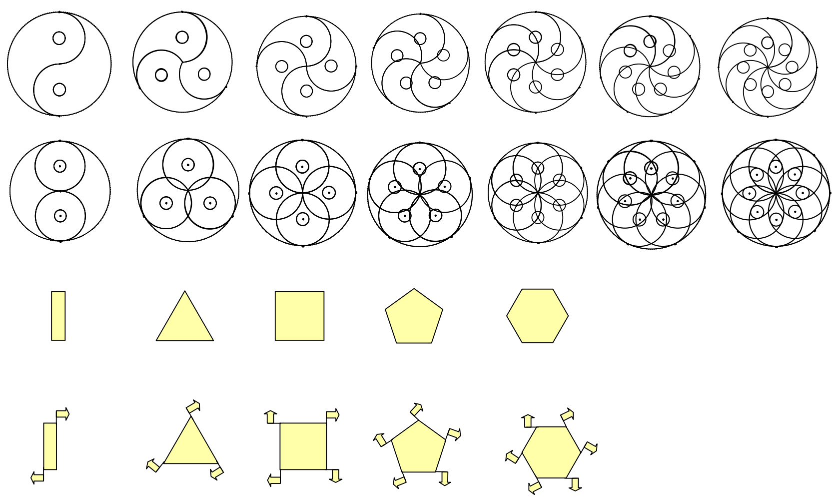
Definition:
Eine Figur soll achsensymmetrisch (drehsymmetrisch) heißen, wenn sie mindestens eine Symmetrieachse (eine nicht triviale Deckdrehung) hat.

Fragen:
Versuchen Sie jeweils Beispiele anzugeben oder zu begründen, warum es solche Figuren nicht geben kann.

Gibt es Figuren, die achsensymmetrisch, aber nicht drehsymmetrisch sind?
Achsenzahl?

Gibt es Figuren, die drehsymmetrisch, aber nicht achsensymmetrisch sind?
Drehwinkel?

Drehungen? **Achsen?**



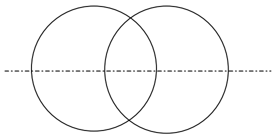
6.2 Symmetrieachsen - Deckdrehungen einer (beschränkten) Figur

Satz 6.3
Alle Figuren seien beschränkt.
a) Für jedes $n \in N$ gilt: Es gibt eine Figur mit genau n Symmetrieachsen.
Lage dieser Symmetrieachsen:
Alle schneiden sich in einem Punkt Z,
Schnittwinkel zwischen 2 benachbarten Achsen: 360° / (2n).
b) Hat eine Figur genau n Symmetrieachsen, so ist jede Drehung um Z um 360°/n eine Deckdrehung der Figur.
Es gibt keine Deckdrehung der Figur mit kleinerem Drehwinkel.
$\Rightarrow$ Jede achsensymmetrische Figur mit mindestens 2 Symmetrieachsen ist auch drehsymmetrisch .
c) Nicht jede drehsymmetrische Figur ist auch achsensymmetrisch
.

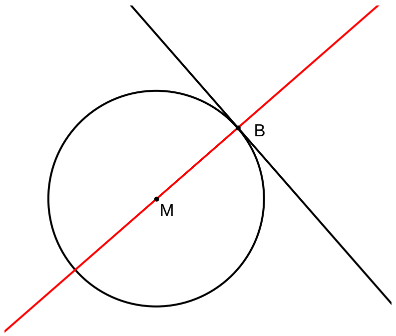
6.3 Kreis - Zweikreisfigur

Kreis
- Unendlich viele Symmetrieachsen (jede Gerade durch M ist S-Achse),
- unendlich viele Deckdrehungen (jede Drehung um M ist Deckdrehung).

Zweikreisfigur
- Zwei Symmetrieachsen ,
  Eigenschaften Grundlage für viele Konstruktionen der Geometrie wie Mittelsenkrechte einer Strecke, Winkelhalbierende.



Kreisfigur mit Tangente
Eine Symmetrieachse (Radius durch den Berührpunkt) .
Als Folgerung: Tangente senkrecht auf dem Berührradius; Grundlage für viele Konstruktionen der Geometrie wie Tangente an einen Kreis von einem Punkt außerhalb des Kreises, gemeinsame Tangenten an zwei Kreise.



6.4 Aufgaben zur Symmetrie

Aufgabe
S_g sei eine Achsenspiegelung an g, $F_0 \subseteq E$ eine beliebige Figur, $F_1 = S_g(F_0)$.

Zeigen Sie, dass $F = F_0 \cup F_1$ die kleinste Figur ist, die F_0 enthält und S_g-symmetrisch ist.

Welche einfache geometrische Tätigkeit aus der Grundschule wird hiermit abstrakt und kompliziert beschrieben?

Aufgabe

- $D_{Z,120°}$ sei eine Drehung um Z mit Drehwinkel 120°, $F_0 \subseteq E$ eine beliebige Figur, $F_1 = S_g(F_0)$, $F_2 = S_g(F_1)$.
  Zeigen Sie, dass $F = F_0 \cup F_1 \cup F_2$ die kleinste Figur ist, die F_0 enthält und $D_{Z,120°}$-symmetrisch ist.

  Welche einfache geometrische Tätigkeit aus der Grundschule wird hiermit beschrieben?

- Nun sei statt $D_{Z,120°}$ die Drehung $D_{Z,30°}$ gegeben. Beschreiben Sie die Konstruktion der kleinsten Figur, die F_0 enthält und $D_{Z,30°}$-symmetrisch ist.

- Beantworten Sie Frage (b) jeweils für die Drehwinkel 50°, 17°.