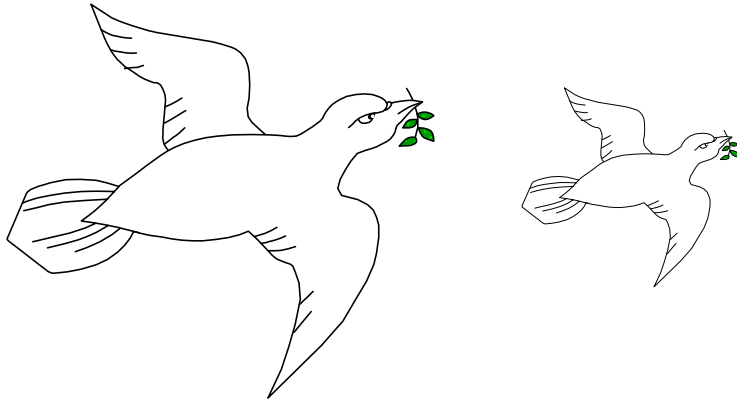
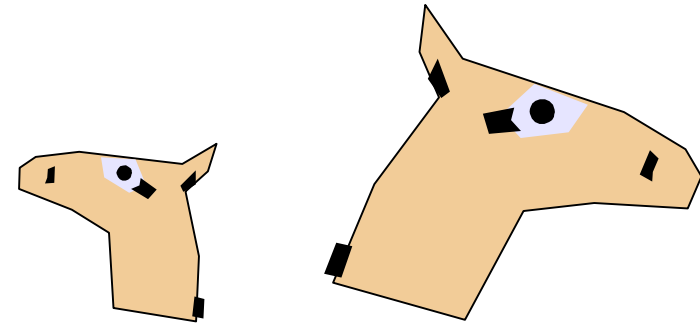


Kapitel 3: Ähnlichkeitsabbildungen

Beispiele



„Verkleinerungen“



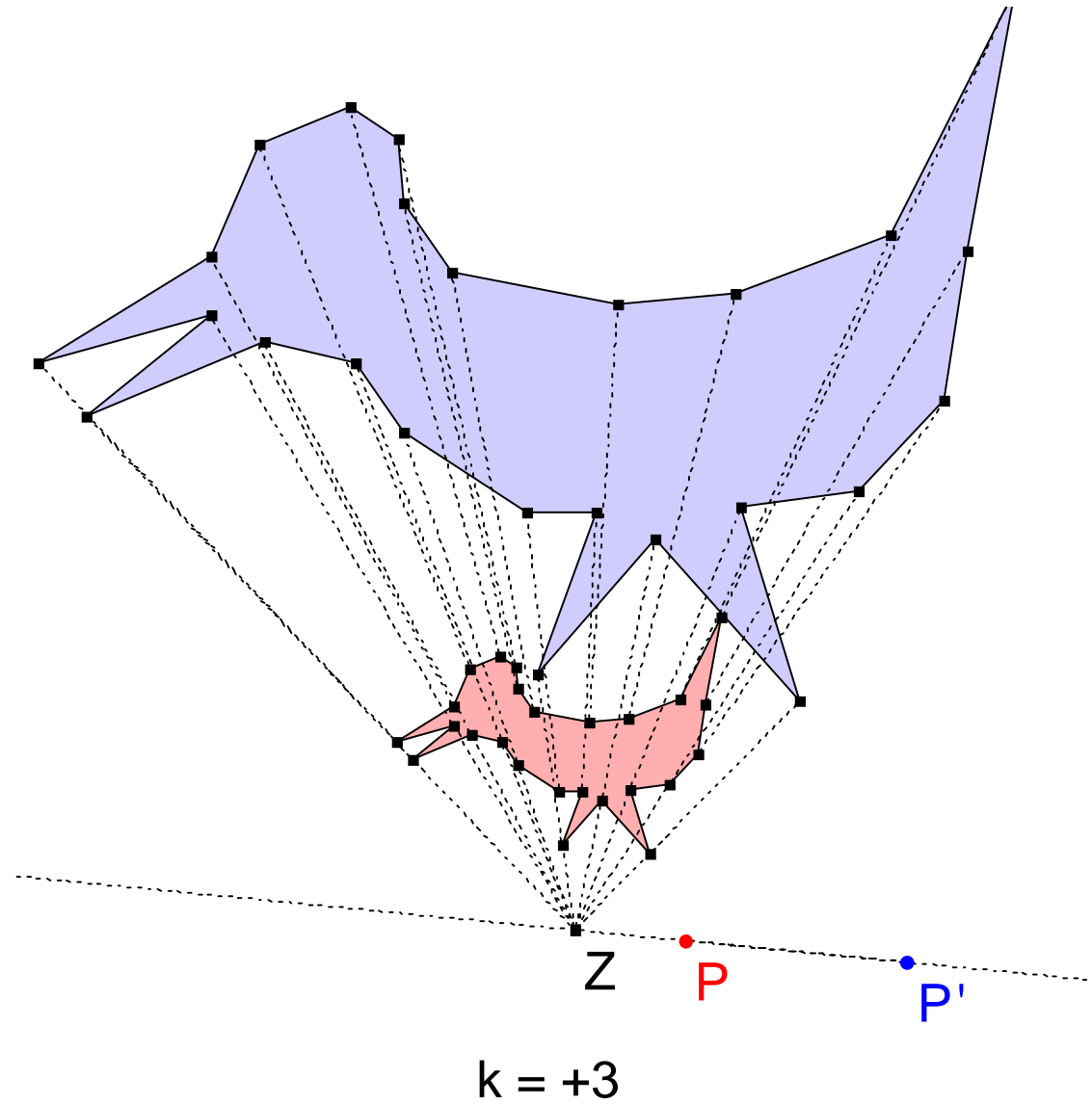
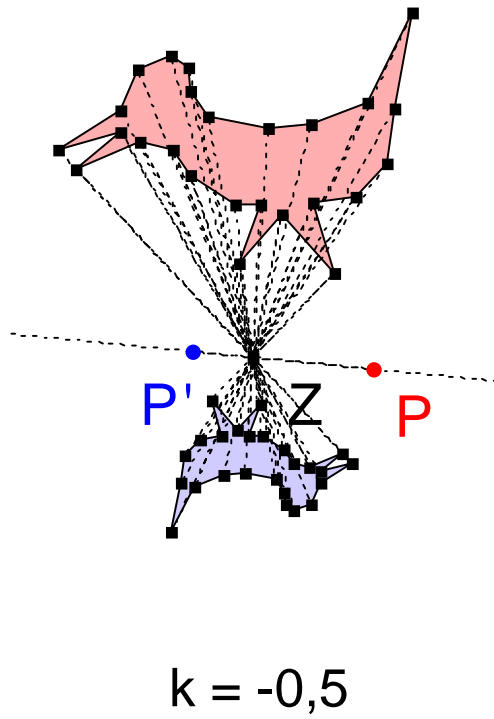
„Vergrößerungen“

Bijektive, geradentreue und winkeltreue Abbildungen der Ebene heißen **Ähnlichkeitsabbildungen**.

Mathematische **Präzisierung**, aber auch **Verengung** der umgangssprachlichen Redeweise

„Die zwei sehen ganz ähnlich aus“

3.1 Zentrische Streckungen



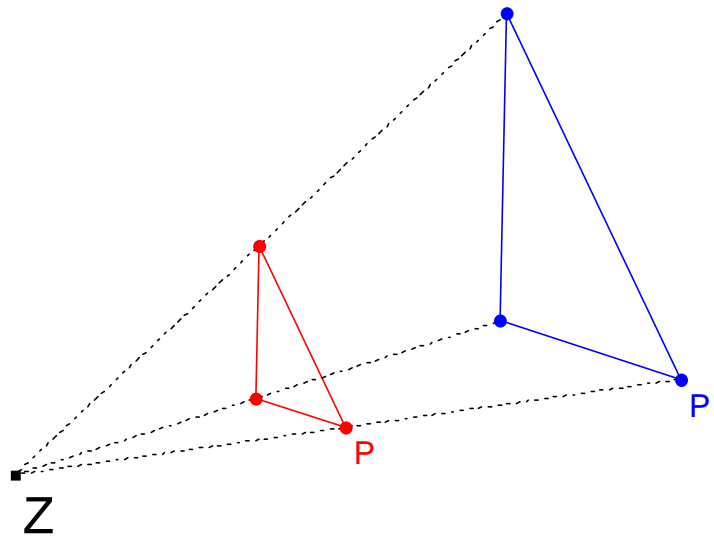
Definition 3.1

Es sei Z ein Punkt der Ebene E ; $k \in \mathbb{R} \setminus \{0\}$.

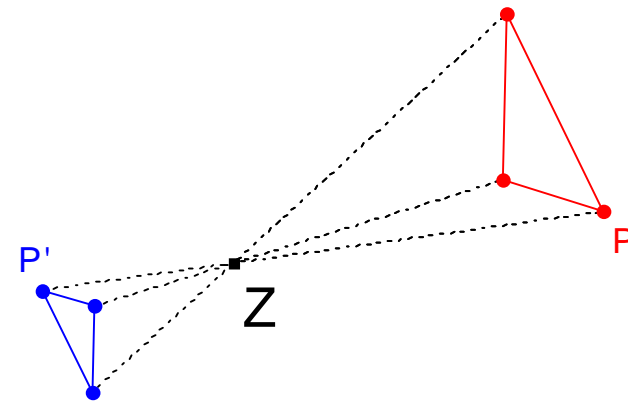
Eine Abbildung $E \rightarrow E$ heißt zentrische Streckung mit (Streck-)Zentrum Z und Streckfaktor k

\Leftrightarrow für jeden Punkt P und seinen Bildpunkt P' gilt: $\overrightarrow{ZP'} = k \cdot \overrightarrow{ZP}$

Beispiel: Strecken von Dreiecken



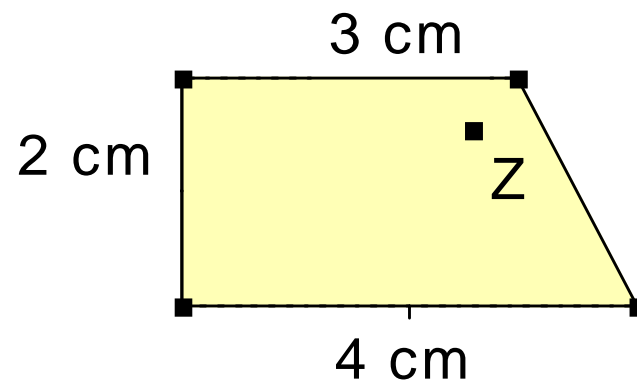
$$k = +2 \quad \overline{ZP'} = 2 \cdot \overline{ZP}$$



$$k = -0,5 \quad \overline{ZP'} = \frac{1}{2} \cdot \overline{ZP}$$

Aufgabe

Führen Sie mit dem Viereck je eine zentrische Streckung durch mit
a) $k = 2$ b) $k = -3$ c) $k = -1$



Was bedeutet Streckung mit $k = -1$?

Wie lässt sich die Streckung mit $k = -3$ deuten?

Was würde eine Streckung mit Faktor $k = 0$ bedeuten?

Eigenschaften einer zentrischen Streckung

- Umkehrabbildung ist die zentrische Streckung mit demselben Zentrum und dem Streckfaktor $1/k$.
- Fixelemente einer zentrischen Streckung:
 - Fixpunkt: Z
 - Fixgeraden: alle Geraden durch Z

Invarianten einer zentrischen Streckung

- Geradentreu (Beweis ausgelassen)
- Bildgerade \parallel Originalgerade
- parallelentreu
- winkelmaßtreu
- umlaufsinntreu
- teilverhältnistreu
- Im allgemeinen ***nicht flächeninhaltenstreu***

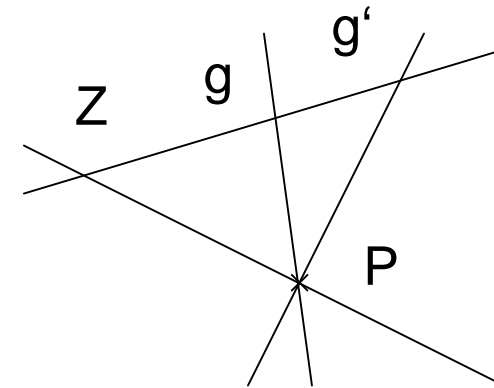
Einige Beweise

Bildgerade \parallel Originalgerade:

$Z \in g : \Rightarrow g' = g$ und $g' \parallel g$.

$Z \notin g$ aber $g' \cap g = \{P\} : \Rightarrow P$ Fixpunkt $\neq Z$.

Also auch hier $g' \parallel g$.



Parallelentreue, Winkelmaßtreue:

Folgen aus der vorangehenden Eigenschaft.

Umlaufsinnstreue: Offensichtlich

Teilverhältnistreue: Beweis später, Satz 3.3.

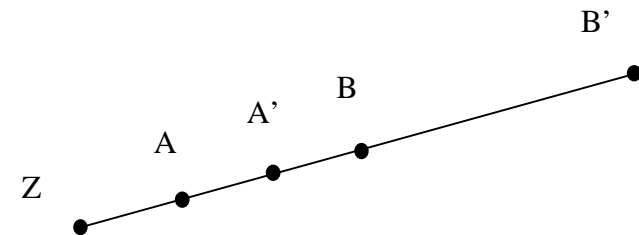
Was wir schon immer geglaubt haben:

Satz 3.1

Bei einer zentrischen Streckung mit Faktor k gilt für *jede* Strecke \overline{AB}
 : $|\overline{A'B'}| = |k| \cdot |\overline{AB}|$

Beweis

1. Fall: A, B liegen auf einer Geraden g durch Z



$$|\overline{A'B'}| = |\overline{ZB'}| - |\overline{ZA'}| = k |\overline{ZB}| - k |\overline{ZA}| = k(|\overline{ZB}| - |\overline{ZA}|) = k |\overline{AB}|$$

Aufgabe

Eine **zentrische Streckung** wird festgelegt durch Angabe des **Streckzentrums Z** und des **Streckfaktors k** .

Kann eine zentrische Streckung auch auf andere Art eindeutig festgelegt werden?

f sei eine zentrische Streckung .

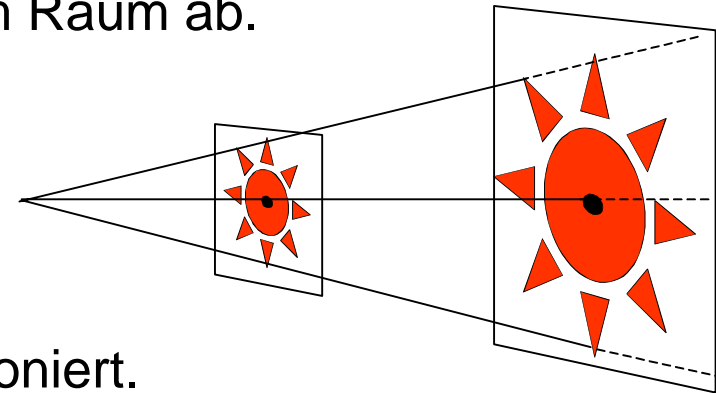
Prüfen Sie, was zutrifft und begründen oder widerlegen Sie.

f wird eindeutig festgelegt durch

- Ein Punktepaar (P, P') , $P \neq P'$,
- Zentrum Z und ein Punktepaar (P, P') ,
- zwei Punktepaare (P, P') , (Q, Q') , $P \neq Q$,
- drei Punktepaare (P, P') , (Q, Q') , (R, R') , P, Q, R nicht auf einer Geraden.

Aufgabe

In der Schule wird zur Einführung der zentrischen Streckung oft das Beispiel eines **Projektors** zur Vergrößerung von Bildern herangezogen. Der Vergrößerungsprozess spielt sich im Raum ab.

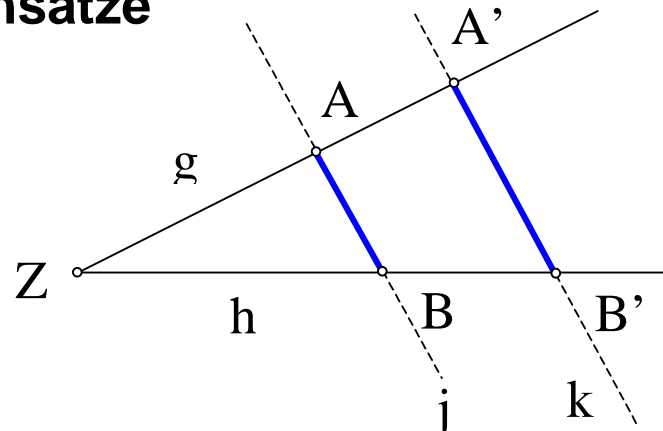


- Erklären sie, wie dieser Prozess funktioniert.
- Erklären sie, wie man daraus eine zentrische Streckung in der Ebene erhält.

Wie kommt man zur Abbildungsvorschrift in der Ebene?

- Welche Arten von zentrischen Streckungen ergeben sich dabei?
- Kennen Sie andere Vorrichtungen im Raum, bei denen solche Vergrößerungen/Verkleinerungen eine Rolle spielen?

3.2 Strahlensätze



$$\begin{aligned} g \cap h &= \{Z\} \\ g \cap j &= \{A\} ; g \cap k = \{A'\}; \\ h \cap j &= \{B\}, \quad h \cap k = \{B'\} \end{aligned}$$

Satz 3.2

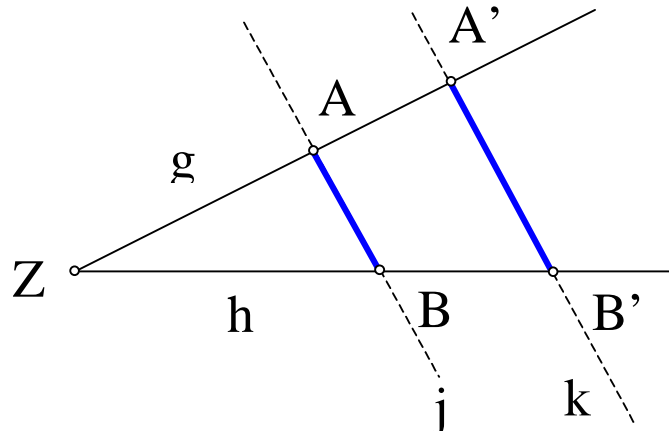
1. Strahlensatz:

Ist $j \parallel k$, so ist $\frac{|\overline{ZA'}|}{|\overline{ZA}|} = \frac{|\overline{ZB'}|}{|\overline{ZB}|}$ und $\frac{|\overline{ZA}|}{|\overline{AA'}|} = \frac{|\overline{ZB}|}{|\overline{BB'}|}$.

Umkehrung des 1. Strahlensatzes:

Ist $\frac{|\overline{ZA'}|}{|\overline{ZA}|} = \frac{|\overline{ZB'}|}{|\overline{ZB}|}$ oder $\frac{|\overline{ZA}|}{|\overline{AA'}|} = \frac{|\overline{ZB}|}{|\overline{BB'}|}$, so ist $j \parallel k$.

Beweis Strahlensatz



Durch $k = \frac{|\overline{ZA'}|}{|\overline{ZA}|}$ wird eine zentrische Streckung definiert.

Das Bild von B unter dieser Streckung sei B^\sim .

Dann ist $A'B^\sim \parallel AB$.

Aus $A'B' \parallel AB$ folgt $A'B' \parallel A'B^\sim$, also

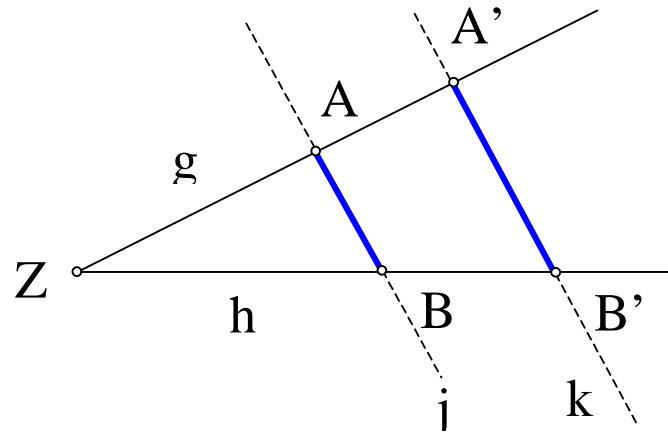
$B'=B^\sim$ und damit auch $k = \frac{|\overline{ZB'}|}{|\overline{ZB}|}$

Beweis Umkehrung

$$\frac{|\overline{ZA'}|}{|\overline{ZA}|} = \frac{|\overline{ZB'}|}{|\overline{ZB}|} = k$$

\Rightarrow A und B werden durch zentrische Streckung mit Faktor k auf A' und B' abgebildet.

$\Rightarrow AB \parallel A'B'$.



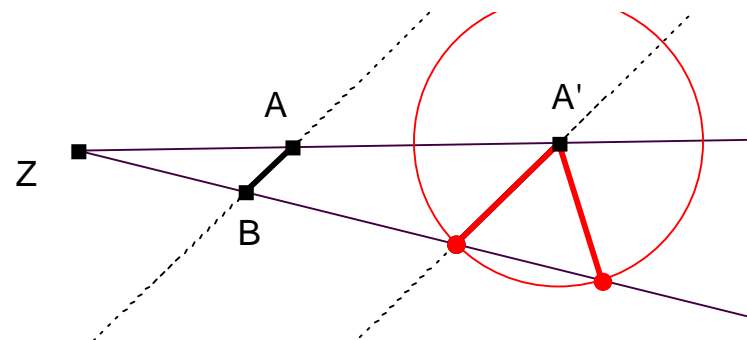
$$\begin{aligned}
 g \cap h &= \{Z\} \\
 g \cap j &= \{A\} ; \quad g \cap k = \{A'\} ; \\
 h \cap j &= \{B\}, \quad h \cap k = \{B'\}
 \end{aligned}$$

Satz 3.2

2. Strahlensatz:

Ist $j \parallel k$, so ist $\frac{|\overline{ZA'}|}{|\overline{ZA}|} = \frac{|\overline{A'B'}|}{|\overline{AB}|}$.

Der 2. Strahlensatz ist nicht umkehrbar!

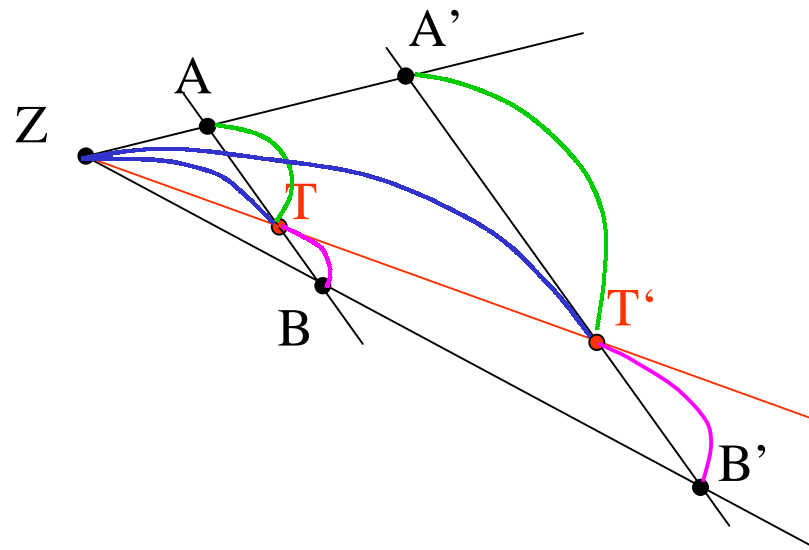


Teilverhältnistreue

Satz 3.3

Drei Punkte A, B, T einer Geraden g werden durch zentrische Streckung auf die Punkte A', B', T' der Geraden g' abgebildet. Dann gilt:

Ist $|\overline{AT}| = r \cdot |\overline{TB}|$, so ist auch $|\overline{A'T'}| = r \cdot |\overline{T'B'}|$.



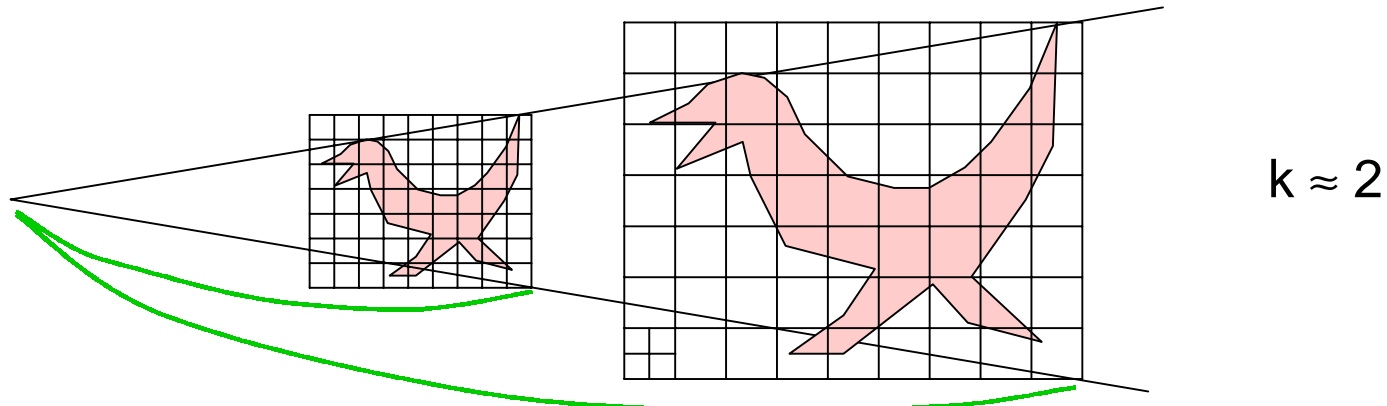
$$\frac{|\overline{A'T'}|}{|\overline{AT}|} = \frac{|\overline{ZT'}|}{|\overline{ZT}|} = \frac{|\overline{T'B'}|}{|\overline{TB}|} \quad \Rightarrow \quad \frac{|\overline{A'T'}|}{|\overline{T'B'}|} = \frac{|\overline{AT}|}{|\overline{TB}|} = r$$

3.3 Flächeninhalt und Volumen bei zentrischer Streckung

Satz 3.4

Bei einer zentrischen Streckung mit dem Faktor k wird

- jede Fläche auf eine Fläche mit k^2 fachem Inhalt abgebildet,
- jeder Körper auf einen Körper mit k^3 fachem Volumen abgebildet.



Anwendung

Massiver Körper auf das k -fache vergrößert:

Volumen und Gewicht nehmen auf das k^3 -fache zu.

Bei massiver Gipsfigur Höhe verdoppelt „ohne die Form zu ändern“ :

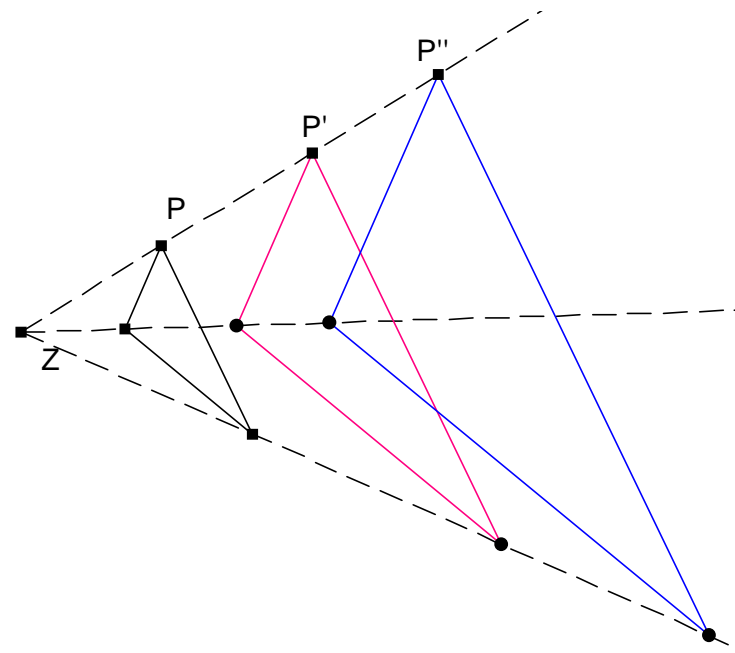
Gewicht nimmt auf das 8-fache zu.

3.4 Hintereinanderausführen von zentrischen Streckungen

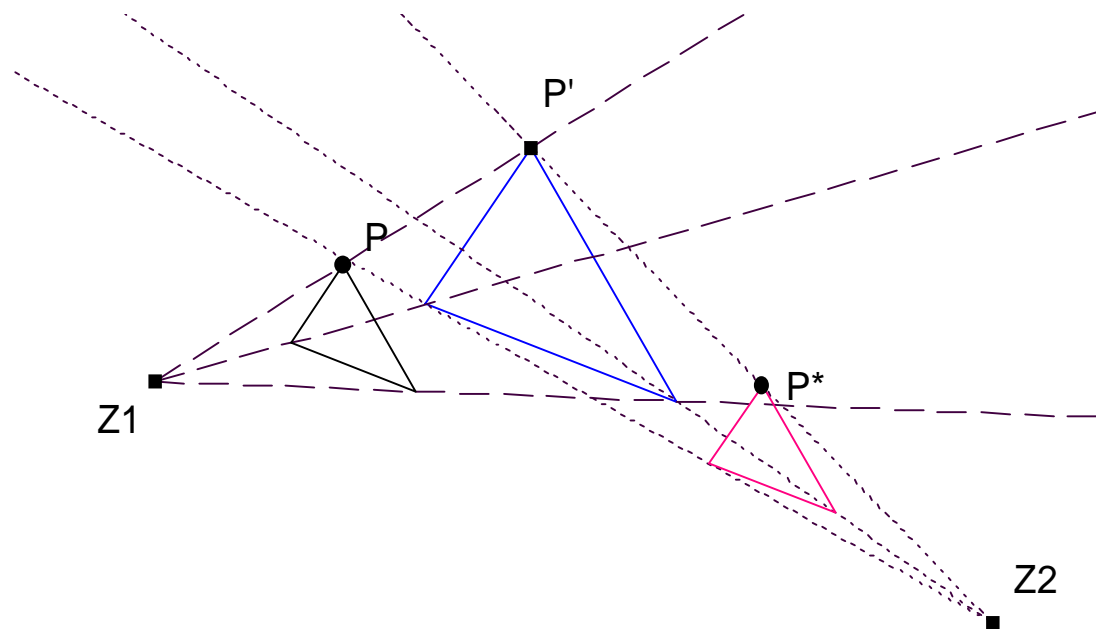
Satz 3.5 (a)

Das Hintereinanderausführen von zwei zentrischen Streckungen mit gemeinsamem Streckzentrum Z und den Streckfaktoren k_1 und k_2 lässt sich ersetzen durch eine zentrische Streckung mit Streckzentrum Z , Streckfaktor $k_1 \cdot k_2$.

(a) Gleiches Streckzentrum



Fall 2: $k_1 \cdot k_2 = 1$



Satz 3.5 (b)

Das Hintereinanderausführen von zwei zentrischen Streckungen mit verschiedenen Streckzentren und den Streckfaktoren k_1 und k_2 lässt sich ersetzen

- durch eine **zentrische Streckung**, falls $k_1 \cdot k_2 \neq 1$, (Zentrum auf Z_1Z_2)
- durch eine **Verschiebung**, falls $k_1 \cdot k_2 = 1$ (Verschiebung $\parallel Z_1Z_2$)

3.5 Ähnlichkeitsabbildungen

Definition 3.2

Eine Abbildung $f: E \rightarrow E$ heißt Ähnlichkeitsabbildung
 $\Leftrightarrow f$ ist bijektiv, geradentreu und winkeltreu

Wie kann man Ähnlichkeitsabbildungen charakterisieren?

Satz 3.6

Jede Ähnlichkeitsabbildung kann man als Verkettung einer zentrischen Streckung mit einer Kongruenzabbildung darstellen.

Beweis?

3.6 Die Gruppe $(\mathbb{Ä}, \circ)$ aller Ähnlichkeitsabbildungen der Ebene

$\mathbb{Ä}$ = Menge aller Ähnlichkeitsabbildungen $E \rightarrow E$;

\circ = „Hintereinanderausführung“

Satz 3.7

$(\mathbb{Ä}, \circ)$ ist eine (unendliche) Gruppe.

(K, \circ) ist eine Untergruppe von $(\mathbb{Ä}, \circ)$.

Beweis

- $\mathbb{Ä}$ ist **abgeschlossen** unter \circ
- **Assoziativgesetz** gilt $(f \circ g) \circ h = f \circ (g \circ h)$
- „id“ (die identische Abbildung) ist **neutrales** Element; $\text{id} \in \mathbb{Ä}$
- mit jedem $f \in \mathbb{Ä}$ ist auch das **inverse** Element $f^{-1} \in \mathbb{Ä}$