Einführung in die Geometrie

SS 2003

Prof.Dr.R.Deissler

Hintergrund – Geschichte - Grundbegriffe

Vom Wesen der Geometrie

Empirische Wissenschaft	**Formal-logische Theorie**
Erfahrungswissenschaft wie die Physik	Keine Begründung durch Erfahrung, keine anschaulichen Argumente
Experimente, Beobachtungen, Aussagen über die Natur	Formale Ableitung von Sätzen nach Regeln der Logik aus **Axiomen** (nicht weiter begründetes System von Grundtatsachen) Anschauung nur als *Hinweis* auf Beweisführungen
Deutung der Theorie in der Welt	Grundlage für Theorien der Physik
Schule, Alltag, Technik	Hochschulmathematik Vermittlung der Idee des Beweisens auch in der Schule (sogenanntes lokales Ordnen)

Die Personen

Axiomatische Methode:

Begonnen von
Euklid **300 v.Chr.**

Buch „Elemente“

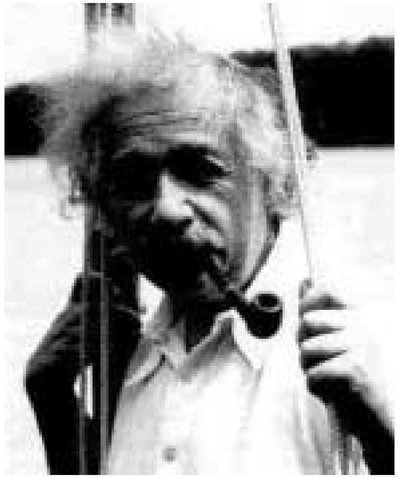
Die Personen

Axiomatische Methode:

Vollendet von
David Hilbert **1900 n.Chr.**

Buch „Grundlagen der Geometrie“

Die Personen



„Insofern sich die Sätze der Mathematik auf die Wirklichkeit beziehen, sind sie nicht sicher, und insofern sie sicher sind, beziehen sie sich nicht auf die Wirklichkeit.“

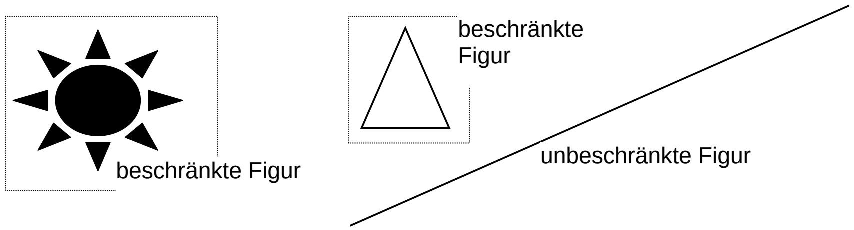
Albert Einstein,
Geometrie und Erfahrung

Definitionen und Sprechweisen

E ist die Anschauungsebene (Zeichenebene)

Eine ***Figur*** **F** ist eine nichtleere Teilmenge F der Ebene E

Figur F heißt ***beschränkt***, wenn sie ganz in ein Rechteck eingeschlossen werden kann

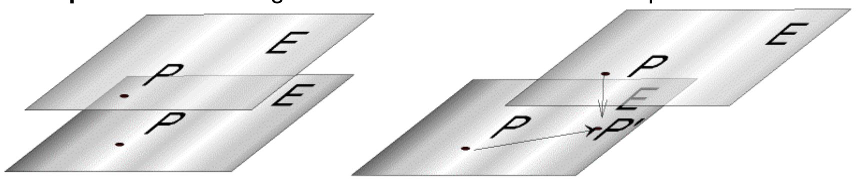


Abbildungen der Ebene in sich

Eine **Abbildung f der Ebene E in E** ist eine Zuordnung, die jedem Punkt P der Ebene E eindeutig einen Bildpunkt P’ zuordnet.

$f: E \to E$	f bildet E in E ab
$f: P \mapsto P'$	f bildet bildet den Punkt P auf den Punkt P‘ab

Beispiel: Verschiebung der Ebene mit Hilfe einer Transparent-Folie



Jedem Punkt P der verschobenen Ebene wird der darunter liegende Punkt P‘ zugeordnet. Dies gibt eine Abbildung von E in E.

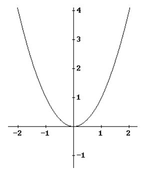
Abbildungen, Funktionen allgemein

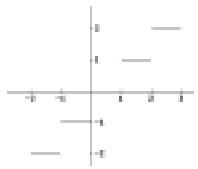
Eine **Abbildung f der der Menge A nach B** ist eine Zuordnung, die jedem Element **$x \in A$** eindeutig ein Bildelement **$y \in B$** zuordnet.

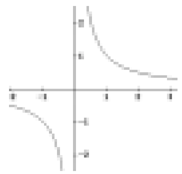
$f: A \to B$	f bildet A nach B ab
$f: x \mapsto y$	f bildet bildet das Element x auf das Element y ab

Beispiele aus dem Bereich der Zahlen:

$f: \mathbb{R} \to \mathbb{R}$	$g: \mathbb{R} \to \mathbb{R}$	$h: \mathbb{R} \to \mathbb{R}$
$f: x \mapsto x^2$	$g: x \mapsto$ größte ganze Zahl $\leq x$	$h: x \mapsto \frac{1}{x}$
$f: -7 \mapsto ?$	$g: 2{,}3 \mapsto$	

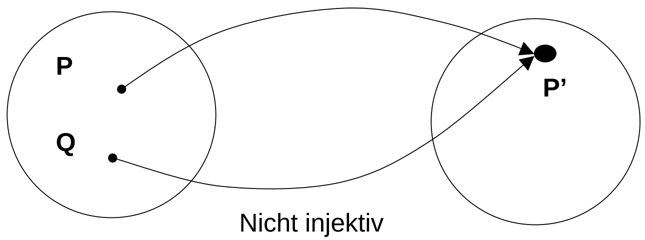






Injektive Abbildungen

Eine Abbildung heißt **injektiv**, wenn keine zwei verschiedenen Punkte den gleichen Bildpunkt besitzen .

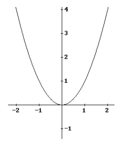


Nicht injektiv

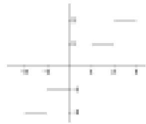
Injektive Abbildungen

Beispiele aus dem Bereich der Zahlen: Injektiv?

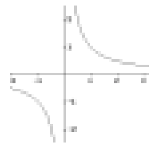
$f: \mathbb{R} \to \mathbb{R}$
$f: x \mapsto x^2$



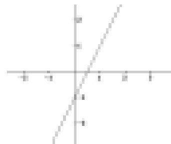
$g: \mathbb{R} \to \mathbb{R}$
$g: x \mapsto$ größte ganze Zahl $\leq x$



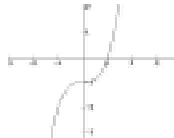
$h: \mathbb{R}\backslash\{0\} \to \mathbb{R}$
$h: x \mapsto \frac{1}{x}$



$i: \mathbb{R} \to \mathbb{R}$
$i: x \mapsto 2x\text{-}1$

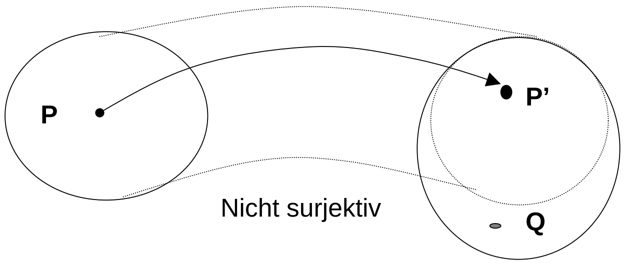


$k: \mathbb{R} \to \mathbb{R}$
$k: x \mapsto x^3\text{-}1$



Surjektive Abbildungen

Eine Abbildung heißt **surjektiv**, wenn jeder Punkt aus E als Bildpunkt vorkommt.



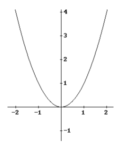
Nicht surjektiv

Q kommt nicht als Bildpunkt vor

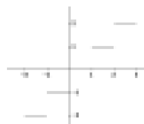
Surjektive Abbildungen

Beispiele aus dem Bereich der Zahlen: Surjektiv?

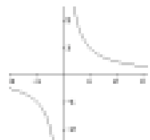
$f: \mathbb{R} \to \mathbb{R}$
$f: x \mapsto x^2$



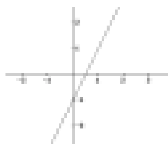
$g: \mathbb{R} \to \mathbb{R}$
$g: x \mapsto$ größte ganze Zahl $\leq x$



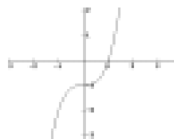
$h: \mathbb{R}\backslash\{0\} \to \mathbb{R}$
$h: x \mapsto \frac{1}{x}$



$i: \mathbb{R} \to \mathbb{R}$
$i: x \mapsto 2x\text{-}1$

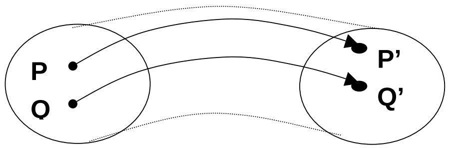


$k: \mathbb{R} \to \mathbb{R}$
$k: x \mapsto x^3\text{-}1$



Bijektive Abbildungen

Eine Abbildung heißt **bijektiv**, wenn sie **injektiv und surjektiv** ist.



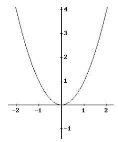
Keine zwei verschiedenen Punkte haben gleiche Bildpunkte

Alle Punkte kommen als Bildpunkte vor

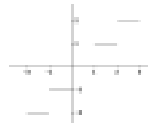
Bijektive Abbildungen

Beispiele aus dem Bereich der Zahlen: Bijektiv?

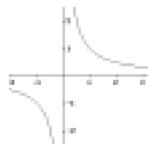
$f: \mathbb{R} \to \mathbb{R}$
$f: x \mapsto x^2$



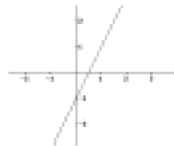
$g: \mathbb{R} \to \mathbb{R}$
$g: x \mapsto$ größte ganze Zahl $\leq x$



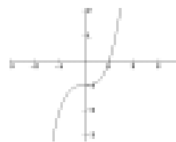
$h: \mathbb{R}\backslash\{0\} \to \mathbb{R}\backslash\{0\}$
$h: x \mapsto \frac{1}{x}$



$i: \mathbb{R} \to \mathbb{R}$
$i: x \mapsto 2x-1$



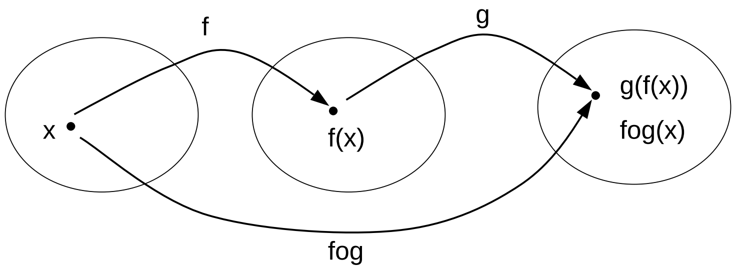
$k: \mathbb{R} \to \mathbb{R}$
$k: x \mapsto x^3-1$



Hintereinanderausführen von Abbildungen $E \to E$

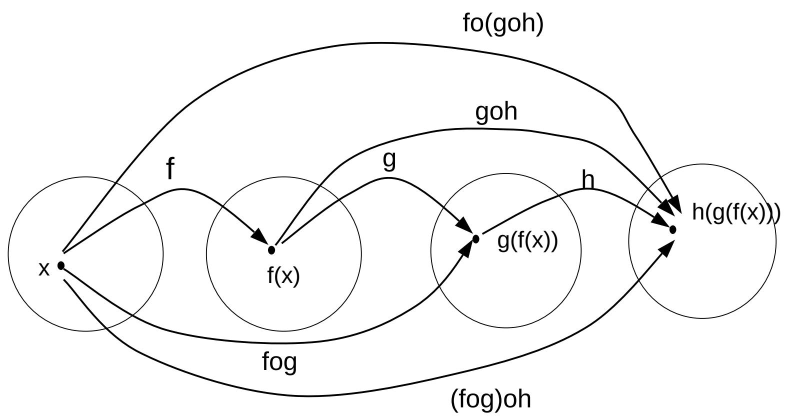
Definition:
Es seien $f: E \to E$ und $g: E \to E$ Abbildungen der Ebene E in sich.

Die **Verkettung** $f \circ g : E \to E$ wird erklärt durch $f \circ g\,(x) = g\,(f(x))$
Zuerst wird f ausgeführt; auf das Ergebnis f(x) wird g angewandt!



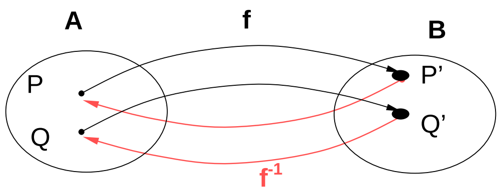
Statt Verkettung sagt man auch Hintereinanderausführung oder Produkt

Satz 1.1
a) Assoziativgesetz $(f \circ g) \circ h = f \circ (g \circ h)$
b) Das Kommutativgesetz gilt nicht: im Allgemeinen ist $f \circ g \neq g \circ f$ (Begründung?)



Inverse einer Abbildung

Definition:
Ist f eine bijektive Abbildung $A \to B$, dann kann man f umkehren, d.h. jedem Bildpunkt wird sein eindeutig bestimmter Urbildpunkt zugeordnet. Die so definierte Abbildung wird mit $\mathbf{f^{-1}}$ bezeichnet und **Inverse zu f** oder Umkehrabbildung zu f genannt.



Jedem Bildpunkt P' wird durch f^{-1} sein Urbild P zugeordnet

Es gilt: $\mathbf{f \circ f^{-1} = id_A}$ und $\mathbf{f^{-1} \circ f = id_B}$

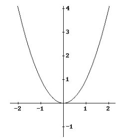
$\mathbf{id_A}$ und $\mathbf{id_B}$ sind die ***identischen Abbildungen*** auf A bzw. auf B.

Für id_A ist $\mathbf{f \circ id_A = id_A \circ f = f}$ für alle Abbildungen f von A nach B.

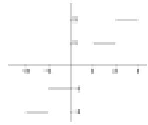
Inverse einer Abbildung

Beispiele aus dem Bereich der Zahlen: Inverse Abbildung?

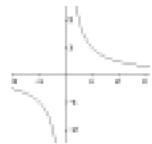
$f: \mathbb{R} \to \mathbb{R}$
$f: x \mapsto x^2$



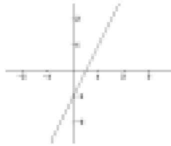
$g: \mathbb{R} \to \mathbb{R}$
$g: x \mapsto$ größte ganze Zahl $\leq x$



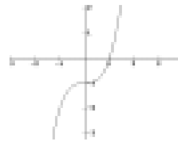
$h: \mathbb{R}\setminus\{0\} \to \mathbb{R}\setminus\{0\}$
$h: x \mapsto \frac{1}{x}$



$i: \mathbb{R} \to \mathbb{R}$
$i: x \mapsto 2x-1$

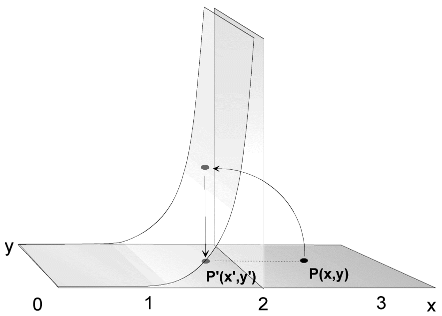


$k: \mathbb{R} \to \mathbb{R}$
$k: x \mapsto x^3-1$



Beispiele für Abbildungen in der Ebene

Durch folgendes Bild wird eine Abbildung von E nach E definiert (Transparentfolie).



$$f(x,y) = \begin{cases} (x,y) & \text{für } x \leq 1 \\ \left(2-\frac{1}{x}, y\right) & \text{für } x > 1 \end{cases}$$

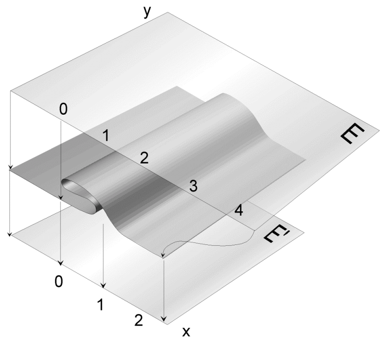
Welche Eigenschaften von Abbildungen liegen vor: injektiv, surjektiv, bijektiv?

Worauf werden Geraden abgebildet? Skizzen!

Prüfen Sie an ausgewählten Punkten, dass durch die nebenstehende Vorschrift eine solche Abbildung angegeben wird.

Beispiele für Abbildungen in der Ebene

Durch folgendes Bild wird eine Abbildung von E nach E definiert (Transparentfolie).



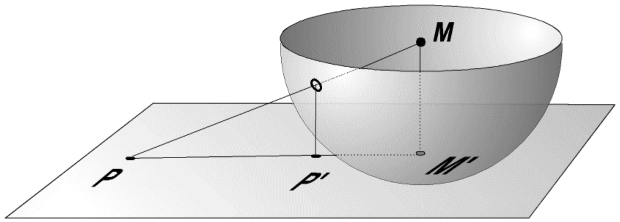
$$(x,y) \mapsto \begin{cases} (x,y) & \text{für } x \leq 1 \\ (2-x, y) & \text{für } 1 < x \leq 2 \\ (x-2, y) & \text{für } x > 2 \end{cases}$$

Worauf werden Geraden abgebildet? Skizzen!

Prüfen Sie an ausgewählten Punkten, dass durch die nebenstehende Vorschrift eine solche Abbildung angegeben wird.

Beispiele für Abbildungen in der Ebene

Durch folgendes Bild wird eine Abbildung von E nach E definiert.

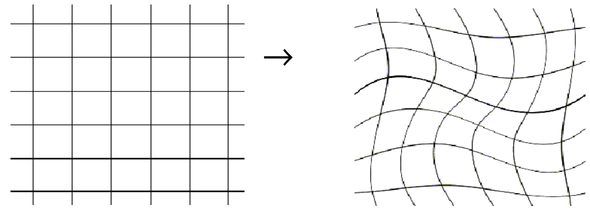


Welche Eigenschaften von Abbildungen liegen vor: injektiv, surjektiv, bijektiv?

Worauf werden Geraden abgebildet? Skizzen!

Beispiele für Abbildungen in der Ebene

f:

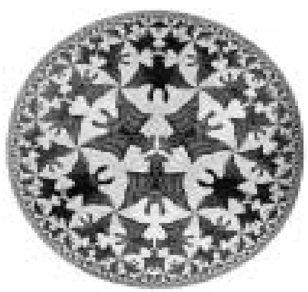


Können sie in dem Bild eine Abbildung der Ebene in sich erkennen?
Beschreiben Sie diese Abbildung. Wie wird sie gewonnen?

Welche Eigenschaften von Abbildungen liegen vor: injektiv, surjektiv, bijektiv?

Worauf werden Geraden abgebildet?

f: **?** →

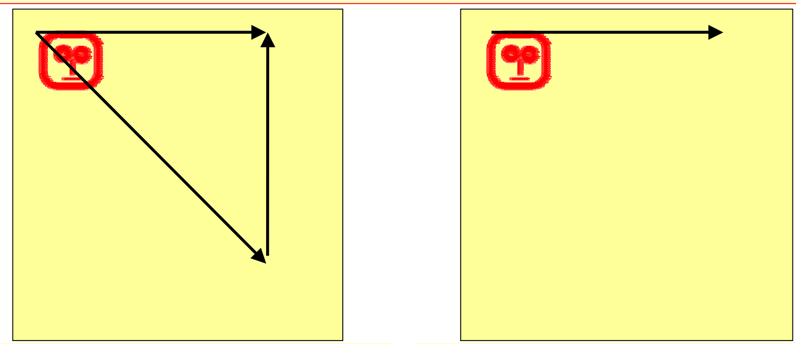


Können sie in dem Bild eine Abbildung der Ebene in sich erkennen?
Beschreiben Sie diese Abbildung. Wie wird sie gewonnen?

Welche Eigenschaften von Abbildungen liegen vor: injektiv, surjektiv, bijektiv?

Worauf werden Geraden abgebildet?

Abbildungsbegriff in der Mathematik



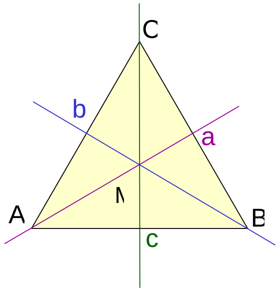
Physik, Technik, bei der Oma	Mathematik
Der Weg ist bedeutsam „s' gibt Kratzer im Parkett!!!“	Nur das Ergebnis ist bedeutsam
Die Verkettung der beiden Verschiebungen *kann ersetzt werden durch eine Verschiebung.*	Die Verkettung der beiden Verschiebungen *ist eine Verschiebung.*

Die Deckabbildungen des gleichseitigen Dreiecks

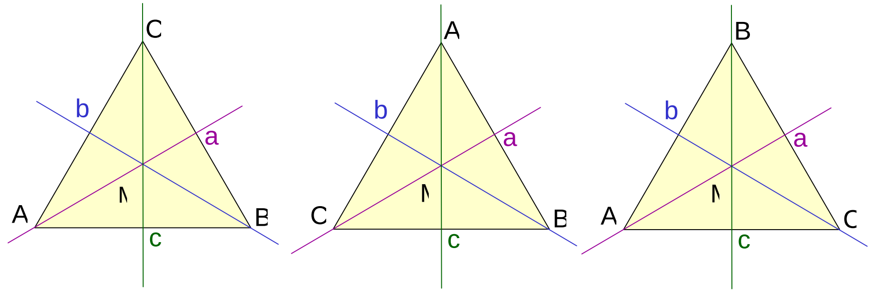
Wird ein gleichseitiges Dreieck aus Pappe ausgeschnitten, kann man es auf verschiedene Weise wieder so hinlegen, dass es mit sich selbst zur Deckung kommt.

Dies kann durch Achsenspiegelungen oder Drehungen geschehen.

Achsenspiegelungen:
an a, b, c (hier die Höhen, nicht die Seiten).
Bezeichnungen S_a, S_b, S_c.
Drehungen um M (im Gegenuhrzeigersinn):
um 0°, 120° , 240°.
Bezeichnungen $D_{M,0°}$, $D_{M,120°}$, $D_{M,240°}$.



Verkettung von Deckabbildungen des gleichseitigen Dreiecks



ABC $\Rightarrow$ CBA $\Rightarrow$ ACB
S_b $D_{M,120°}$

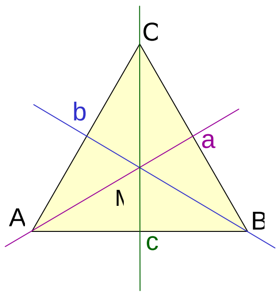
S_b o $D_{M,120°}$ = S_a

$S_b = \begin{pmatrix} ABC \\ CBA \end{pmatrix}$ $D_{M,120°} = \begin{pmatrix} ABC \\ BCA \end{pmatrix}$ $S_b \circ D_{M,120°} = \begin{pmatrix} ABC \\ ACB \end{pmatrix}$

Gruppentafel der Deckabbildungen des gleichseitigen Dreiecks

Kurze Schreibweise: „ 120 “ statt $D_{M,120°}$ und „ a “ statt S_a .

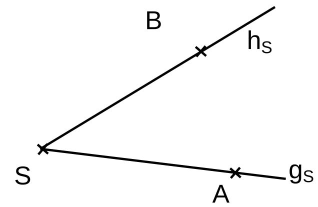
o	0	120	240	a	b	c
0	0	120	240	a	b	c
120	120					
240	240					
a	a					
b	b					
c	c					

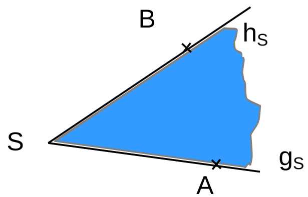


b o a = ?

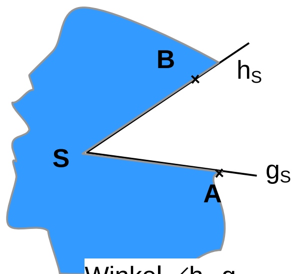
Winkelbegriffe

Zwei Halbgeraden g_S und h_S mit gemeinsamem Anfangspunkt S bilden eine **Winkelfigur**. Diese Winkelfigur legt zwei **Winkelfelder** fest, ein inneres und ein äußeres, wenn die Halbgeraden nicht auf einer Geraden liegen.

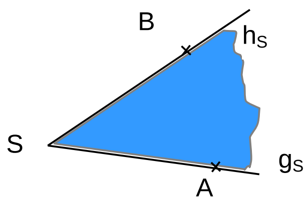




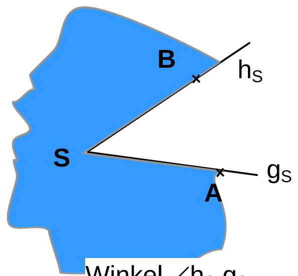
Winkel $\angle g_S,h_S$
Winkel $\angle$ASB



Winkel $\angle h_S,g_S$
Winkel $\angle$BSA



Winkel $\angle g_S,h_S$
Winkel $\angle ASB$



Winkel $\angle h_S,g_S$
Winkel $\angle BSA$

Zur Unterscheidung: ➡ Orientierung von Winkeln

$\angle g_S,h_S$: Das Winkelfeld, das überstrichen wird, wenn g_S im **Gegenuhrzeigersinn** um S auf h_S **gedreht** wird

Winkelmessung in Grad.

Keine Orientierung, nur positive Winkel.

Keine Unterscheidung von Winkel und Winkelmaß.

Winkelmaße nehmen nur Werte aus dem Bereich [0°,360°[an.

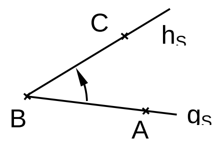
Ein Winkel von 360° ist gleich groß wie ein Winkel von 0°.

Winkelfelder werden stets im mathematisch positiven Sinn notiert.

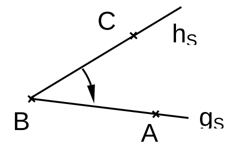
Technische oder physikalischen Anwendungen

Bei Drehungen ist der Verlauf der Drehung von Bedeutung

➡ wichtig, **orientierte Winkel** zu betrachten.



positiver orientierter Winkel



negativer orientierter Winkel

Winkelmaße mit Werten größer als 360°

Umdrehung eines Karussells mit -900° :

Das Karussell hat sich zweieinhalb mal im Uhrzeigersinn gedreht.

Wir benutzen in der Geometrie auch negative Winkel und Winkel mit Maßen über 360°, um intuitive Bezeichnungen zu ermöglichen und Berechnungen zu erleichtern.

Diese Winkel sind aber stets ***gleich*** einem nicht orientierten Winkel mit Maß aus dem Bereich [0°,360°[.

Dynamische Geometrie Systeme

Winkelbezeichnung ohne Orientierung:

➡ Unterscheidung zwischen innerem und äußerem Winkelfeld nicht möglich.

„DynaGeo“ Grundeinstellung:
Wählen, ob Winkelorientierung berücksichtigt wird oder nicht.
Ohne Orientierung können dann nur Winkel zwischen 0° und 180° gemessen werden.

Parallele Geraden

Es gibt mehrere Möglichkeiten, Parallelität von Geraden zu definieren.

Definition:
Zwei Geraden g und h heißen ***parallel***, wenn sie beide auf einer dritten Geraden k senkrecht stehen.
Wir schreiben dafür g || h .

Nach dieser Definition gilt insbesondere g || g !

Unter Voraussetzung von genügend vielen Axiomen kann man folgern:

g || h und g ≠h ⇔ g und h haben keinen gemeinsamen Punkt.
g || h ⇔ g und h haben überall den gleichen Abstand.

Diese beiden Eigenschaften könnte man auch zur Definition von Parallelität verwenden.

Wie lautet die Definition in diesen Fällen?.

Einige Bemerkungen zur „Axiomatik“

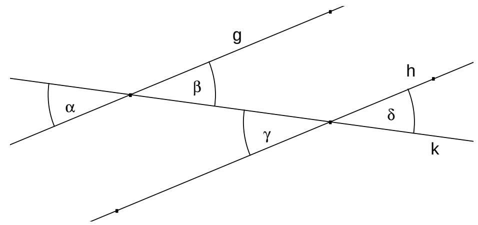
Wir wollen hier keine axiomatische Geometrie betreiben, wollen aber unter Verwendung von hinreichend vielen nicht weiter begründeten Voraussetzungen, geometrische Sätze beweisen.

Diese Voraussetzungen können wir als Axiome auffassen

Folgende Sachverhalte, die wir immer wieder im Sinne von Axiomen verwenden wollen, sollen hier noch einmal kurz festgehalten werden.

Winkel an geschnittenen Parallelen

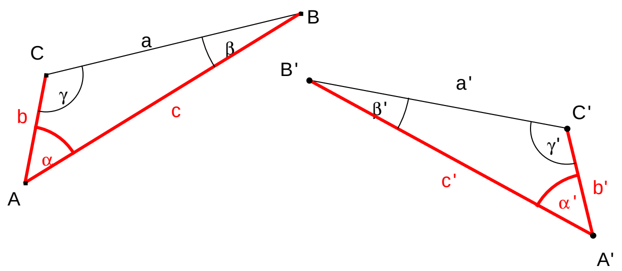
Die Parallelen g, h , g≠h, werden von einer Geraden k geschnitten. Dann sind
- die *Stufenwinkel* α und γ gleich groß,
- die *Wechselwinkel* β und γ bzw. α und δ gleich groß



Sätze über die Größe von Seitenlängen und Winkelgrößen in Dreiecken (Kongruenzsätze)

Die aus der Schule geläufigen „**Kongruenzsätze**“ in der folgenden Form („sws“ als Beispiel):

Stimmen zwei Dreiecke in zwei Seiten(längen) und der Größe des eingeschlossenen Winkels überein, dann stimmen sie auch in allen anderen Seitenlängen und Winkelgrößen überein.



Konstruktionen mit Zirkel und Lineal

Wenn wir von „Konstruktionen“ sprechen, dann meinen wir stets „Konstruktionen mit Zirkel und Lineal“.
Dabei versteht man unter einem Lineal ein Gerät ohne Skaleneinteilung, nur zum Zeichnen gerader Linien.

Bei Konstruktionen mit Zirkel und Lineal dürfen nur die folgenden Schritte durchgeführt werden:

Konstruktionen mit Zirkel und Lineal

1. Beliebigen **Punkt** zeichnen.
2. Beliebigen **Punkt auf** einer Geraden, Strecke oder Kreislinie zeichnen.
3. **Gerade durch zwei Punkte** zeichnen (Lineal).
4. **Zwei Punkte** durch eine **Strecke** verbinden(Lineal).
5. **Schnittpunkte** von Geraden, Strecken und Kreislinien zeichnen.
6. **Kreis um** einen gegebenen **Mittelpunkt M durch** einen weiteren **Punkt P** zeichnen (Zirkel).
7. **Kreis um** einen gegebenen **Mittelpunkt M mit** einem **Radius** zeichnen, der **von zwei** (schon konstruierten oder gegebenen) **Punkten** übernommen werden kann (Zirkel).
   “Radius aus der Zeichnung in den Zirkel übernehmen und damit einen Kreis zeichnen“.

Konstruktionen mit Zirkel und Lineal

Wenn wir davon sprechen, eine Streckenlänge oder ein Winkelmaß sei gegeben, dann meinen wir, dass ein Objekt mit diesen Maßen vorgegeben ist, es also nicht konstruiert werden muss.
Gegebene Streckenlängen und Winkel müssen prinzipiell mit Zirkel und Lineal übertragen werden, dürfen also nicht abgemessen werden.

Nachdem einige Grundkonstruktionen mit Zirkel und Lineal als durchführbar erkannt wurden, lassen wir diese als „Module“ in späteren Konstruktionen zu. Sie werden in Konstruktionsbeschreibungen als Ganzes aufgeführt.

Konstruktionen mit Zirkel und Lineal

Bei der Durchführung einer Konstruktion dürfen dafür auch die üblichen Zeichenhilfsmittel verwandt werden:

- Senkrechte zu Geraden oder Strecken durch einen Punkt → Geodreieck.
- Parallele zu Geraden oder Strecken durch einen Punkt → Geodreieck.
- Abtragen einer gegebenen Streckenlänge auf einer Geraden → Lineal mit Maßstab.
- Übertragen einer gegebenen Winkelgröße an eine Gerade in einem Punkt → Winkelmesser.

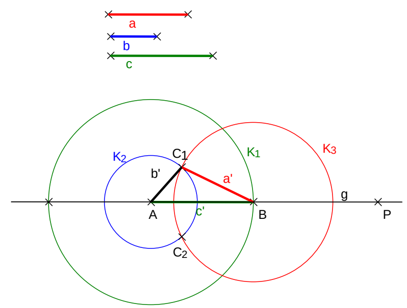
In „Euklid“ stehen Hilfsmittel für diese Grundkonstruktionen ebenfalls zur Verfügung.

Beispiel einer Konstruktion mit Zirkel und Lineal

Gegeben: a, b, c.
Konstruiere das Dreieck ABC mit den Seitenlängen a, b, c.

Konstruktionsbeschreibung:

- Punkt A
- Gerade g durch A
- K_1 ist ein Kreis um A mit Radius c
- B ist ein Schnittpunkt der Geraden g mit Kreis K_1
- K_2 ist ein Kreis um A mit Radius b
- K_3 ist ein Kreis um B mit Radius a
- C_1 ein Schnittpunkt der Kreise K_2 und K_3
- C_2 2. Schnittpunkt der Kreise K_2 und K_3
- c' ist die Strecke [A ; B]
- a' ist die Strecke [B ; C_1]
- b' ist die Strecke [C_1 ; A]

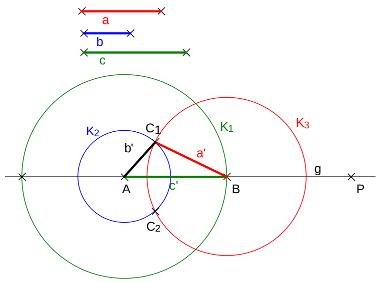


Beispiel einer Konstruktion mit Zirkel und Lineal

Gegeben: a, b, c.
Konstruiere das Dreieck ABC mit den Seitenlängen a, b, c.

Konstruktionsbeschreibung kurz:

- Strecke $\overline{AB} = c$
- K_2(A,b)
- K_3(B,a)
- C_1 ein Schnittpunkt K_2,K_3
- C_2 der 2. Schnittpunkt K_2,K_3
- C = C_1 oder C = C_2
- Dreieck ABC



Lizenz für **DynaGeo-Version ab 2.4** :

Lizenzdatei

PdagogischeHochschule01.dgl

vom “Schwarzen Brett” im Hochschulnetz laden und das DynaGeo-Verzeichnis kopieren.
Demoversion starten und “Hilfe/registrieren” wählen.
Die Demoversion wird dadurch zur lizensierten Version.

Schwarzes_Brett\Mathematik und Informatik\Deissler\Geometrie\Geometrie_SS2003\Euklid+Lizenzdatei-PHFR

Sie dürfen diese Lizenz privat solange nutzen, wie Sie an der PH studieren (wie an der Schule eine erweiterte Schullizenz).

DynaGeo – EUKLID Homepage:

http://www.dynageo.de/

Lizenz für DynaGeo – EUKLID während des Studiums an der PH-Freiburg

Lizenz für **Euklid-Version bis 2.3** :

Datei

PdagogischeHochschule00.ini

vom “Schwarzen Brett” im Hochschulnetz laden und das DynaGeo-Verzeichnis kopieren.
Die Demoversion wird dadurch zur lizensierten Version.
Oder die Lizenzdaten aus der Datei von Hand in das Programm übertragen.

Schwarzes_Brett\Mathematik und Informatik\Deissler\Geometrie\Geometrie_SS2003\Euklid+Lizenzdatei-PHFR

Daten in eine neu aus dem Internet runtergeladene **Euklid-Version bis 2.3** eingeben. Aus der Demoversion wird dann eine lizensierte Version.

Literatur

Kirsche, Peter
Einführung in die Abbildungsgeometrie
Kongruenzabbildungen und Ähnlichkeiten (Mathematik-ABC für das Lehramt)
Teubner, Stuttgart 1998
Am besten für die Vorlesung geeignet.

Mitschka, A. ; Strehl , R.; Hollmann, E.
Einführung in die Geometrie
Grundlagen, Kongruenz- und Ähnlichkeitsabbildungen.
Franzbecker, Hildesheim 1998
Für Vorlesungen für Lehramtsstudenten, gut zum Nachlesen, etwas alt, nicht immer ganz einfach.

Stein, Martin
Geometrie (Mathematik Primarstufe)
Spektrum, Akad. Verl., Heidelberg 1999
Für Vorlesungen für Grundschullehrer geschrieben, aber weicht stark von unserem Zugang ab.

Scheid, Harald
Elemente der Geometrie
BI-Wiss.-Verl., Mannheim 1991
Für Vorlesungen für Lehramtsstudenten. Sehr umfangreich, tiefer gehend, gut zum Nachschlagen.

Wittmann, Erich
Elementargeometrie und Wirklichkeit
Vieweg, Braunschweig 1987
Sehr umfassend. Viele interessante geometrische Sachverhalte, sehr gut zum Nachschlagen. Anspruchsvoll aber gut verständlich.

Mitschka, Arno
Didaktik der Geometrie in der Sekundarstufe 1
Herder, Freiburg 1982
Didaktik der Geometrie, aber sehr alt und daher streckenweise sehr formal !!!

DIFF- Heft Elementargeometrie
DIFF Tübingen 1974
Sehr alt, gibt sorgfältige, korrekte aber sehr abstrakte Einführung in ein Axiomensystem für die Geometrie.
Hat man früher von Lehrern der SI verlangt!
Wer‘s genau wissen will, kann hier nachlesen.

Franke, Marianne
Didaktik der Geometrie
Spektrum Verlag, Heidelberg 2000
Didaktik der Geometrie, nur für die Grundschule. Viel theoretischer Hintergrund und empirische Daten.

Geometrievorlesungen im Internet

Rinkens, H.D.
Elemente der Geometrie
http://math-www.uni-paderborn.de/~rinkens/veranst/elgeo2001/index.html
Gut verständlich, Inhalte vergleichbar mit denen unserer Vorlesung.

Weth, Th.
Elemente der Geometrie (Hauptschule) - SS 2000
http://www.didmath.ewf.uni-erlangen.de/Vorlesungen/Geometrie_HS/Geo_2000/index2.htm
Gut verständlich, Inhalte vergleichbar mit denen unserer Vorlesung.