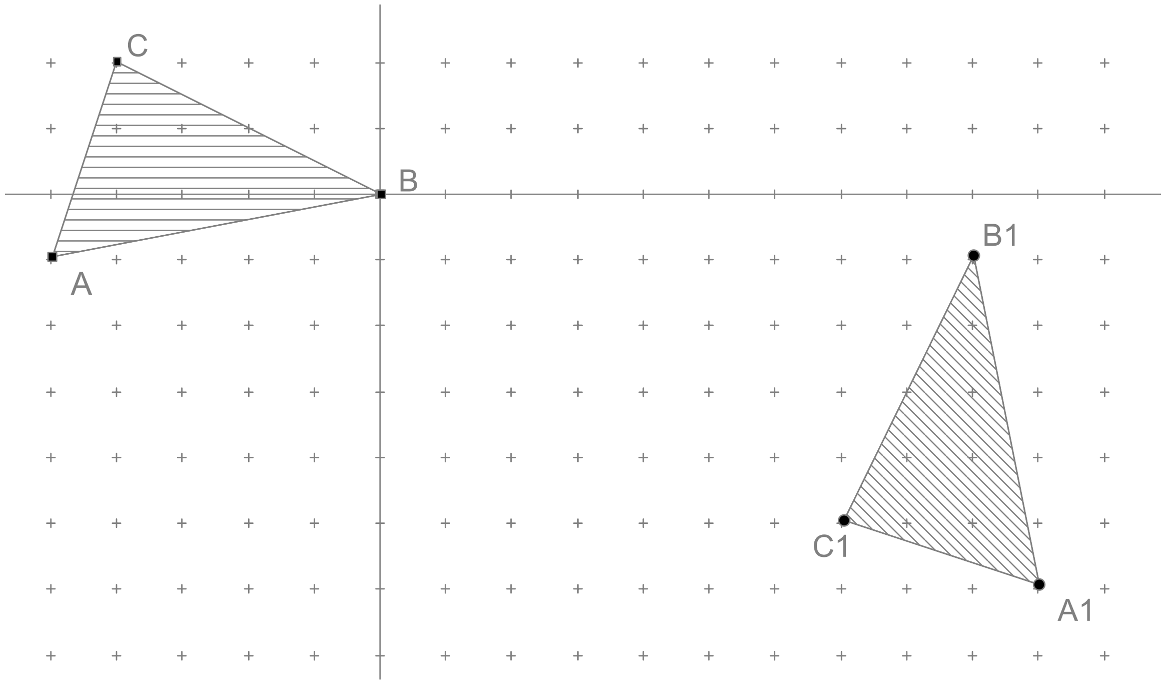
Übungen zur Einführung in die Geometrie

SS 2002 27./28. Mai / Exkursionswoche Blatt 6

Die Aufgaben 1 und 2 sollten auch mit EUKLID bearbeitet werden.

1. Hintereinanderausführen von 3 Geradenspiegelungen
   Die Geraden f, g und h begrenzen
   a) ein rechtwinklig-gleichschenkliges Dreieck ABC; $f \perp g$
   b) ein gleichseitiges Dreieck ABC.
   Eine Figur F soll an diesen 3 Geraden gespiegelt werden. Konstruieren Sie jeweils diejenige Abbildung, welche das Hintereinanderausführen der 3 Geradenspiegelungen $S_f \circ S_g \circ S_h$ ersetzt.

2. Die Dreiecke ABC und $A_1B_1C_1$ sind zueinander kongruent.
   a) Begründen Sie dies mit Hilfe von Kongruenzsätzen aus der Mittelstufengeometrie.
   b) Dreieck ABC kann durch maximal 3 Achsenspiegelungen auf Dreieck $A_1B_1C_1$ abgebildet werden.
   Warum ist dies möglich?
   Konstruieren Sie solche Achsenspiegelungen.

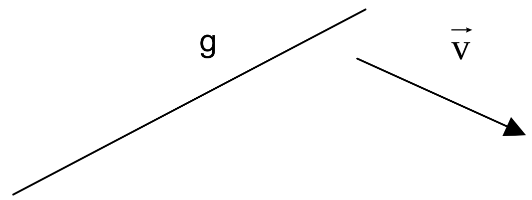


3. Eine Figur wird um Z(0,0) um 60° gedreht und anschließend um 2 Einheiten in x - Richtung und 3 Einheiten in y-Richtung verschoben.
   Ersetzen Sie dieses Hintereinanderausführen von Abbildungen durch eine einzige Kongruenzabbildung.
   Bestimmen Sie anschließend rechnerisch die Daten für diese Abbildung.

4. a) Zwei Spiegel sollen unter 90° aufeinander stoßen.
   Was sehen Sie, wenn Sie auf die Stoßkante blicken?
   b) Zwei Spiegel sind hintereinander und zueinander parallel aufgestellt.
   Was sehen Sie, wenn Sie sich zwischen die beiden Spiegel stellen?
   c) Zwei Spiegel sind hintereinander und beinahe parallel zueinander aufgestellt.
   Was sehen Sie nun, wenn Sie sich zwischen die beiden Spiegel stellen?
   Hinweis: Im KG III, 1. OG sind im Flur vor den Räumen der Physik verschiedene Spiegel aufgebaut!

5. Schubspiegelung

Eine Figur wird an der Geraden g gespiegelt und anschließend um $\vec{v}$ verschoben. (siehe Abb.)

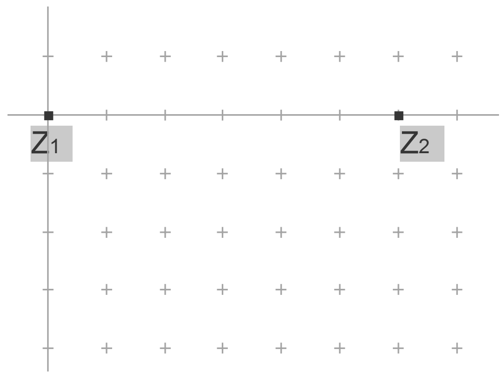


(a) Ist die Reihenfolge „zuerst spiegeln, dann verschieben“ vertauschbar?

(b) Konstruieren Sie eine Gerade h und eine Verschiebung $\vec{w}$ so, dass

$S_g \circ V_{\vec{v}} = S_h \circ V_{\vec{w}}$ und $h \parallel \vec{w}$ ist.

6. Verkettung zweier Drehungen



(a) Es sei Z_1 (0,0), $\alpha = 30°$ Z_2 (6,0), $\beta = 60°$.
Zeigen Sie, dass $D_{Z1,\alpha} \circ D_{Z2,\beta}$ eine Drehung $D_{Z,\gamma}$ ist. Konstruieren Sie Z und γ.
Begründen Sie, dass $\gamma=90°$ ist.

(b) Berechnen Sie für (a) die Koordinaten von Z mit Hilfe von Winkelfunktionen.

(c) Es sei Z_1 (0,0), $\alpha = 30°$ Z_2 (6,0), $\beta = 270°$.
Zeigen Sie, dass $D_{Z1,\alpha} \circ D_{Z2,\beta}$ eine Drehung $D_{Z,\gamma}$ ist. Konstruieren Sie Z und γ.
Begründen Sie, dass $\gamma=300°$ ist.
Erklären Sie, warum man auch mit $\beta=-90°$ und $\gamma=-60°$ rechnen könnte.

(d) Es sei Z_1 (0,0), $\alpha = 60°$ Z_2 (6,0), $\beta = 300°$.
(Zur einfacheren Veranschaulichung kann man verwenden $D_{Z2,-60°} = D_{Z2,300°}$.)
Konstruieren Sie wiederum die Abbildung $D_{Z1,\alpha} \circ D_{Z2,\beta}$ und berechnen Sie die Daten der Abbildung.

7. Verkettung von Achsenspiegelung und Drehung

g sei eine Gerade, $Z \in g$, $D_{Z,\alpha}$ eine Drehung um Z mit Winkel α. Zeigen Sie, dass

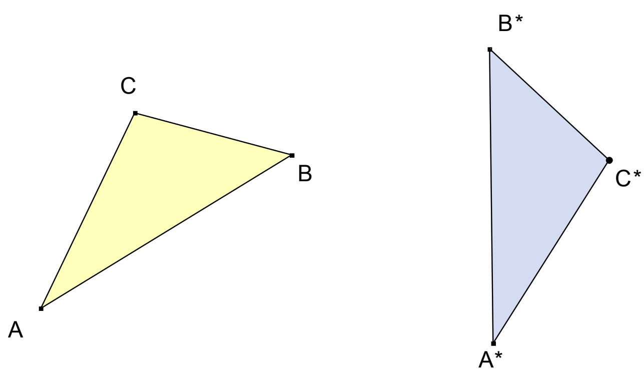
(a) $S_g \circ D_{Z,\alpha} = S_h$,wobei $Z \in h$ und $\angle g,h = \frac{1}{2}\alpha$,

(b) $D_{Z,\alpha} \circ S_g = S_k$,wobei $Z \in k$ und $\angle k,g = \frac{1}{2}\alpha$.

8. Schubspiegelung

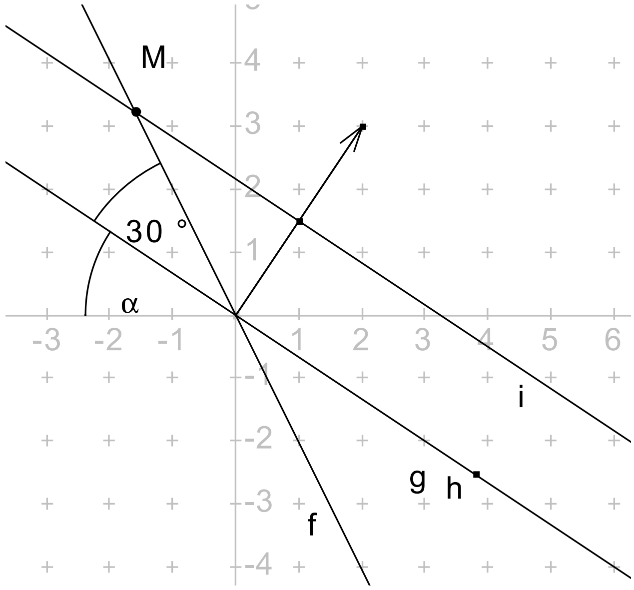
(a) Sei $Sch_{g,v}$ eine Schubspiegelung mit der Spiegelachse g und dem zu g parallelen Verschiebungsvektor $\vec{v}$. Sei P ein beliebiger Punkt, P’ sein Bildpunkt.
Zeigen Sie, dass die Achse g die Strecke $\overline{PP'}$ halbiert.

(b) Konstruieren Sie für die abgebildeten Dreiecke ABC und A*B*C* die Spiegelachse g und den Verschiebungsvektor $\vec{v}$, mit Hilfe von (a).



Einige Lösungen zu Blatt 6

Aufgabe 3



Konstruktion der Abbildung:
(s.nebenstehendes Bild)

Darstellung der Drehung durch Spiegelung an den Achsen f, g mit Winkel 30°, der Verschiebung durch Spiegelung an den Achsen h, i mit entsprechendem Abstand, so dass g und h zusammenfallen.
Es ergibt sich eine Drehung um den Schnittpunkt M der Achsen f und i um 60° (da ∠ f,i = 30° ist, Wechselwinkel an Parallelen).

Berechnung:

Der Drehwinkel ist 60°. Es ist M zu berechnen. Dazu stellen wir die Gleichungen der Geraden f und i auf und berechnen deren Schnittpunkt (Abiturwissen!)

Steigung von g, h und i: $m = -\frac{2}{3}$

Gleichung von i („Punkt-Steigungsform“) : $\frac{y-1.5}{x-1} = -\frac{2}{3}$, $y = -\frac{2}{3}x + \frac{13}{6}$

Berechne α: $\tan(\alpha) = \frac{2}{3}$, $\alpha = \tan^{-1}\left(\frac{2}{3}\right) \approx 33{,}69°$

Steigung von f: $m = -\tan(\alpha + 30°) = -\tan(\tan^{-1}(\frac{2}{3}) + 30°) \approx -2.02$

Gleichung von f: $y = -2.02x$

Schnittpunkt von f und i: $-2.02x = -\frac{2}{3}x + \frac{13}{6}$, gelöst $x \approx -1.60$,

$y \approx -2.02 \cdot (-1.60) \approx 3.23$

$\boxed{\text{M(-1.60/3.23)}}$

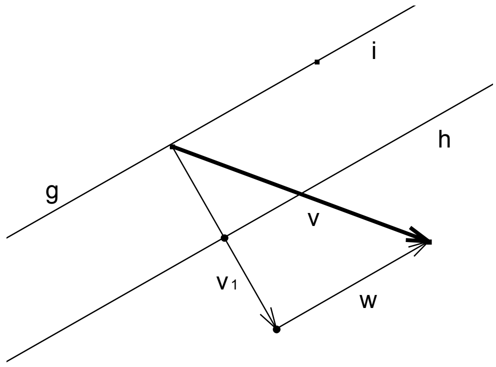
Exakte Lösung (ohne Rundungen)

$$x_M = -\frac{\frac{13}{6}}{\tan(\tan^{-1}(\frac{2}{3}) + 30°) - \frac{2}{3}}$$

$$y_M = -\tan(\tan^{-1}(\frac{2}{3}) + 30°) \cdot x_M$$

Aufgabe 5 b

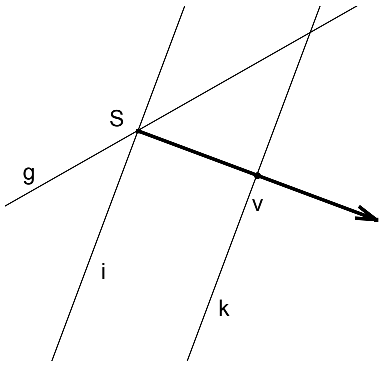
1.Weg (einfach, benutzt Satz 2.13 über die Verkettung von zwei Verschiebungen, Gesetz der Vektoraddition, trickreich?)

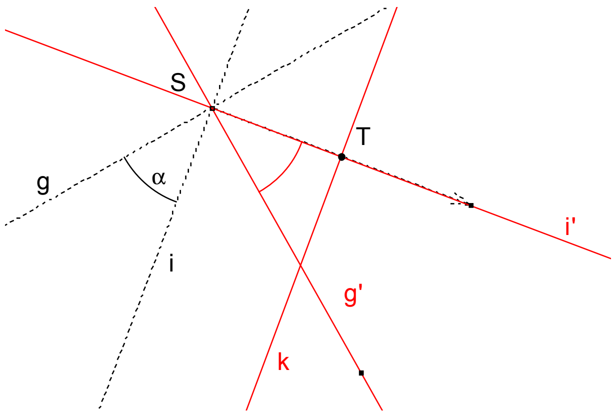


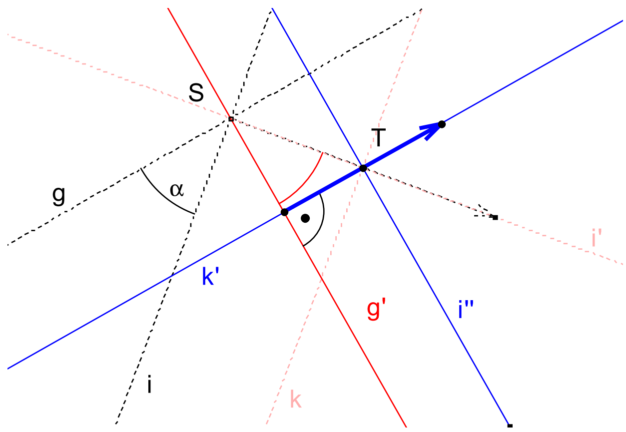
Wir stellen die Verschiebung $\vec{v}$ durch eine Verschiebung $\vec{w}$ mit Verschiebungsvektor parallel zu g und eine Verschiebung mit Verschiebungsvektor $\vec{v_1}$ senkrecht zu g dar. Die Verschiebung mit dem Vektor $\vec{v_1}$ kann durch Spiegelung an den parallelen Achsen i und h dargestellt werden, wobei i mit g zusammenfällt.

Es ergibt sich $S_g \circ V_{\vec{v}} = S_g \circ S_i \circ S_h \circ V_{\vec{w}} == S_h \circ V_{\vec{w}}$ (s.Abbildung)

2.Weg (etwas komplzierter aber nicht trickreich, vollzieht fast wörtlich die Überlegungen zum Beweis des Satzes 2.8 über die Verkettung von drei Achsenspiegelungen nochmals nach.)







$S_g \circ V_{\vec{v}} = S_g \circ S_i \circ S_k$ Darstellung der Verschiebung durch Achsenspiegelungen

$= S_{g'} \circ S_{i'} \circ S_k$ Drehung von (g,i) um S, $\{S\} = g \cap i$, $i' \perp k$,

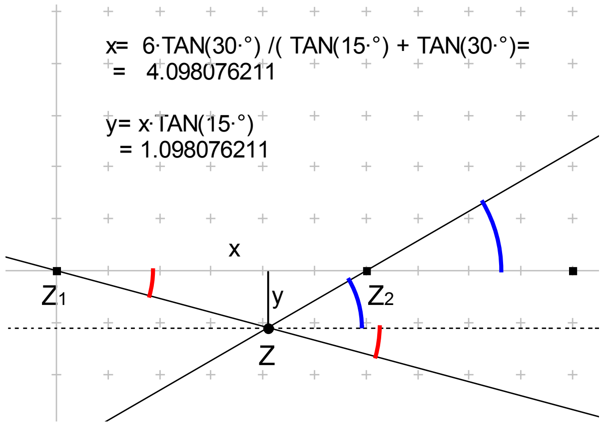
$= S_{g'} \circ S_{i''} \circ S_{k'}$ Drehung von (i',k) um T, $\{T\} = i' \cap k$, $i'' \parallel g'$.

$S_{g'} \circ S_{i''}$ definiert eine Verschiebung mit Verschiebungsvektor $\vec{w}$ parallel zu k', k' ist die gesuchte Spiegelachse h.

$S_{g'} \circ S_{i''} \circ S_{k'} = V_{\vec{w}} \circ S_h = S_h \circ V_{\vec{w}}$ (Vertauschung möglich, da $\vec{w} \parallel h$) .

Der Fall, dass g||i ist, S also nicht existiert, ist trivial (warum?).

Aufgabe 6
(a)(b)



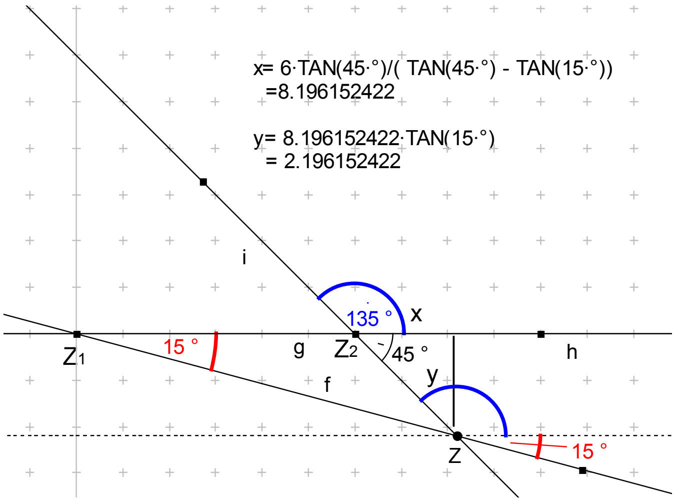
Koordinaten
Z(x,y):

$$\tan(15°) = \frac{y}{x}$$

$$\tan(30°) = \frac{y}{6-x}$$

$\Rightarrow$ x tan(15°) = (6-x) tan(30°)

6(c)



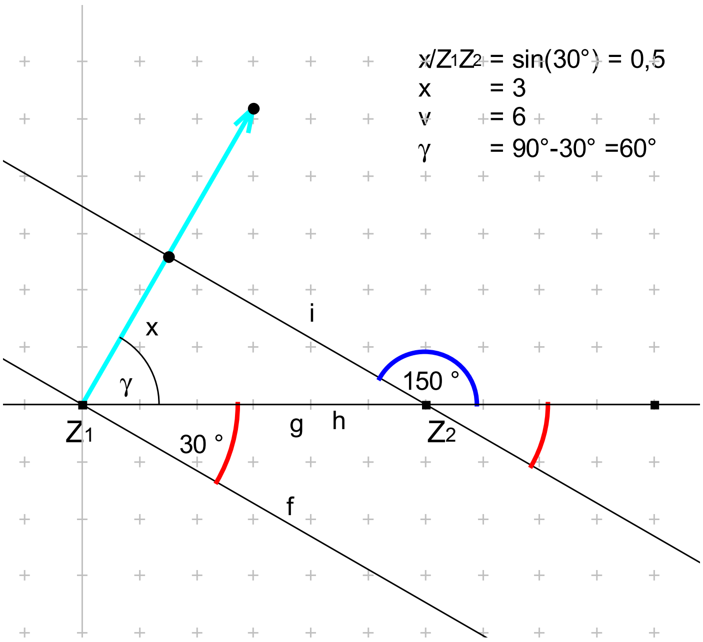
Koordinaten
Z(x,y):

$$\tan(15°) = \frac{y}{x}$$

$$\tan(45°) = \frac{y}{x-6}$$

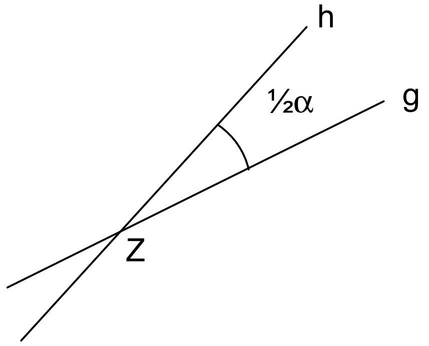
$\Rightarrow$ x tan(15°) = (x-6) tan(45°)

6(d)



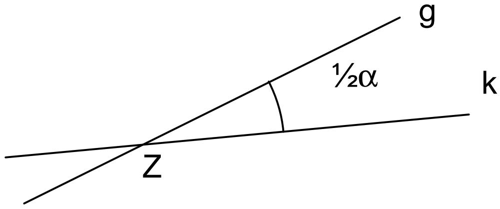
Aufgabe 7
(a)

$S_g \circ D_{Z,\alpha} = S_g \circ (S_g \circ S_h) = (S_g \circ S_g) \circ S_h) = S_h$



7(b)

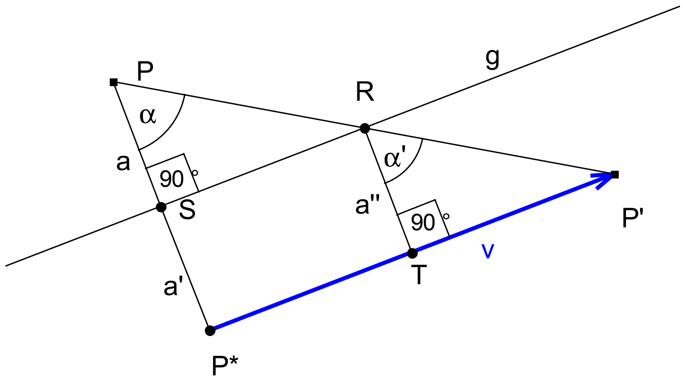
$D_{Z,\alpha} \circ S_g = (S_k \circ S_g) \circ S_g = S_k \circ (S_g \circ S_g\ ) = S_k$



Braucht man beim Beweis eines Satzes über die Symmetrieachsen und Deckdrehungen einer beschränkten Figur.

Aufgabe 8
(a)

a=a'=a''
α=α'=α''
rechte Winkel
$\Rightarrow$ Δ PSR kongruent Δ RTP'
$\Rightarrow \quad \overline{PR} = \overline{RP'}$



8(b)