Seminar zur fraktalen Geometrie - Aufgabenblatt 4 - Lösungen

Aufgabe 1

„*log*" bezeichnet den Zehnerlogarithmus, der oft mit lg bezeichnet wird. Im Folgenden schreiben wir lg für den Zehnerlogarithmus.

Aufgabe 2

lg(100000) = 5 lg(1/10000) = -4 lg(0,001) = -3 $\lg(\sqrt{1000}) = \frac{3}{2}$ $\lg(\frac{1}{\sqrt{1000}}) = -\frac{3}{2}$

Aufgabe 3

lg(2,34) ≈ 0,**3692**. Berechnen Sie ohne Taschenrechner:

lg(23,4) = lg(2,34·10) = lg(2,34)+lg(10) = lg(2,34)+1 ≈ 0,3692+1 = 1,**3692**

lg(234) = 2,**3692** lg(2340) ≈ 3,**3692** lg(0,234) ≈ 0,3692-1 = -0,**6308** lg(0,00234) ≈ 0,3692-3 = -2,**6308**

Aufgabe 4

(a) $3\cdot 2^x = 7$ $x = \frac{\lg(\frac{7}{3})}{\lg(2)} \approx 1{,}22$ (b) $4\cdot 1.5^x = 20$ $x = \frac{\lg(5)}{\lg(1{,}5)} \approx 3{,}97$

(c) $5\cdot\left(\frac{4}{3}\right)^x = 10$ $x = \frac{\lg(2)}{\lg(4)-\lg(3)} \approx 2{,}41$ (d) $3^{x-1} = 20$ $x = \frac{\lg(20)}{\lg(3)} + 1 \approx 3{,}73$

(e) $3^{x^2} = 20$ $x = \pm\sqrt{\frac{\lg(20)}{\lg(3)}} \approx \pm 1{,}65$ (f) $2\cdot 3^{5x} = 100$ $x = \frac{\lg(50)}{5\cdot\lg(3)} \approx 0{,}71$

Aufgabe 5*

Eine Geldanlage von 10000 € wird mit dem Jahreszinssatz von 5% verzinst.

(a) Berechnen Sie, nach wie vielen Jahren das Anfangskapital sich verdoppelt hat, wenn *nicht* mit Zinseszins gerechnet wird (also die Zinsen etwa jährlich ausbezahlt und für nutzlose Dinge wie Eis essen u.ä. verbraten werden).

Jahreszins: 10000 €·5%, Zeit zur Verdopplung t Jahre, verdoppeltes Kapital 20000 €:

10000 € +10000 €·5%·t=20000 € $\boxed{1+5/100\cdot t = 2}$ also t=20.

(b) Berechnen Sie, nach wie vielen Jahren das Anfangskapital sich verdoppelt hat, wenn mit Zinseszins gerechnet wird (die Zinsen also solide wieder angelegt werden).

Kapital und Zins zusammen nach einem Jahr: 10000 €·(1+5%) = 10000 €·1,05, nach t Jahren

10000 €·$1{,}05^t$. 10000 €·$1{,}05^t$ = 20000 € , $\boxed{1{,}05^t = 2}$, $t = \frac{\lg(2)}{\lg(1{,}05)} \approx 14{,}2$.

Das Kapital hat sich also nach 15 Jahren erstmals mehr als verdoppelt.

Aufgabe 6*

Eine Population von 1000 Bakterien wächst exponentiell und verdoppelt sich in 10 Stunden.

(a) Bestimmen Sie die Anzahl A(80) der Bakterien nach 80 Stunden.
(b) Bestimmen Sie die Anzahl A(5) der Bakterien nach 5 Stunden.
(c) Bestimmen Sie die Anzahl A(t) der Bakterien nach t Stunden.

(a) Wachstums***faktor*** in je 10 Stunden ist 2, also in 80 Stunden $2\cdot2\cdot2\cdot2\cdot2\cdot2\cdot2\cdot2=2^8$, daher nach 80 Sunden 256 000 Bakterien.
(b) Wachstums***faktor*** in je 5 Stunden ist eine Zahl, deren Quadrat 2 ergibt, also $\sqrt{2}$, daher nach 5 Sunden 1414 Bakterien.

(c) Zeit in Stunden: t , $A(t) = 1000\cdot 2^{\frac{t}{10}}$ (ok, für t=10 ergibt sich $A(10)=1000\cdot 2^1=2000$) ⇒

$$A(80) = 1000\cdot 2^{\frac{80}{10}} = 1000\cdot 2^8 = 256\,000$$

$$A(5) = 1000\cdot 2^{\frac{5}{10}} = 1000\cdot 2^{\frac{1}{2}} = 1000\cdot\sqrt{2} \approx 1414$$