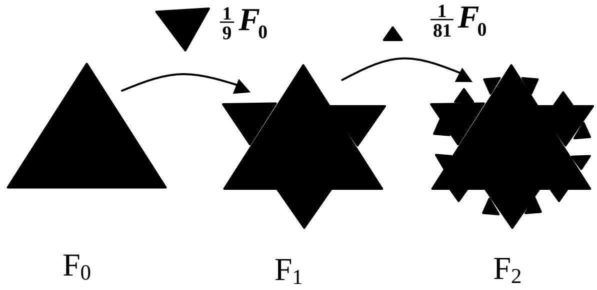
Aufgabenblatt 2 - Längen und Flächeninhalte von Monstern - Lösung Aufgabe 3



Schneeflockenkurve (von Koch-Kurve).

(vergl. Peitgen, Fraktale, Kap.3.2)

Anzahl sz(n) der Seiten von F_n:

$$\left.\begin{aligned} sz(0) &= 3 \\ sz(n+1) &= sz(n)\cdot 4 \end{aligned}\right\} \Rightarrow sz(n) = 3\cdot 4^n$$

Flächeninhalt der kleinen Dreiecke, die im Schritt von der n-ten zur (n+1)-ten Flocke aufgesetzt werden:

$$F_0\cdot\left(\frac{1}{3^2}\right)^{n+1}$$

Flächeninhalt der Schneeflocken:

$$\left.\begin{aligned} F_1 &= F_0 + 3\cdot\frac{F_0}{9} \\ F_{n+1} &= F_n + sz(n)\cdot F_0\cdot\left(\frac{1}{3^2}\right)^n \end{aligned}\right\} \Rightarrow F_n = F_0 + F_0\cdot 3\cdot\frac{1}{9} + F_0\cdot 3\cdot\frac{4^1}{9^2} + F_0\cdot 3\cdot\frac{4^2}{9^3} + \ldots + F_0\cdot 3\cdot\frac{4^n}{9^{n+1}}$$

$$F_n = F_0 + F_0\cdot\frac{1}{3}\left(1+\frac{4}{9}+\left(\frac{4}{9}\right)^2+\left(\frac{4}{9}\right)^3 \ldots + \left(\frac{4}{9}\right)^n\right) \Rightarrow$$

$$F_\infty = F_0 + F_0\cdot\frac{1}{3}\left(\frac{1}{1-\frac{4}{9}}\right) = F_0 + F_0\frac{3}{5} = F_0\cdot\frac{8}{5}$$

Hat das Ausgangsdreieck den Flächeninhalt 1, dann hat die gesamte Schneeflocke den Flächeninhalt $\frac{8}{5}$.

Umfang der Kurve K_n:

$$\left.\begin{aligned} K_0 &= 3s_0 \\ K_{n+1} &= K_n\cdot\frac{4}{3} \end{aligned}\right\} \Rightarrow K_n = 3s_0\cdot\left(\frac{4}{3}\right)^n$$

Dies zeigt, daß der Umfang der Kurven K_n über alle Grenzen wächst, wenn n gegen ∞ geht.