G 20353 F

August 2005/47. Jg.

PM

Praxis der Mathematik in der Schule

Sekundarstufen 1 und 2

Auszug aus:
Praxis der Mathematik in der Schule, Heft 4/2005

Zur Verfügung gestellt für den BLK Modellversuch „SINUS-Transfer“

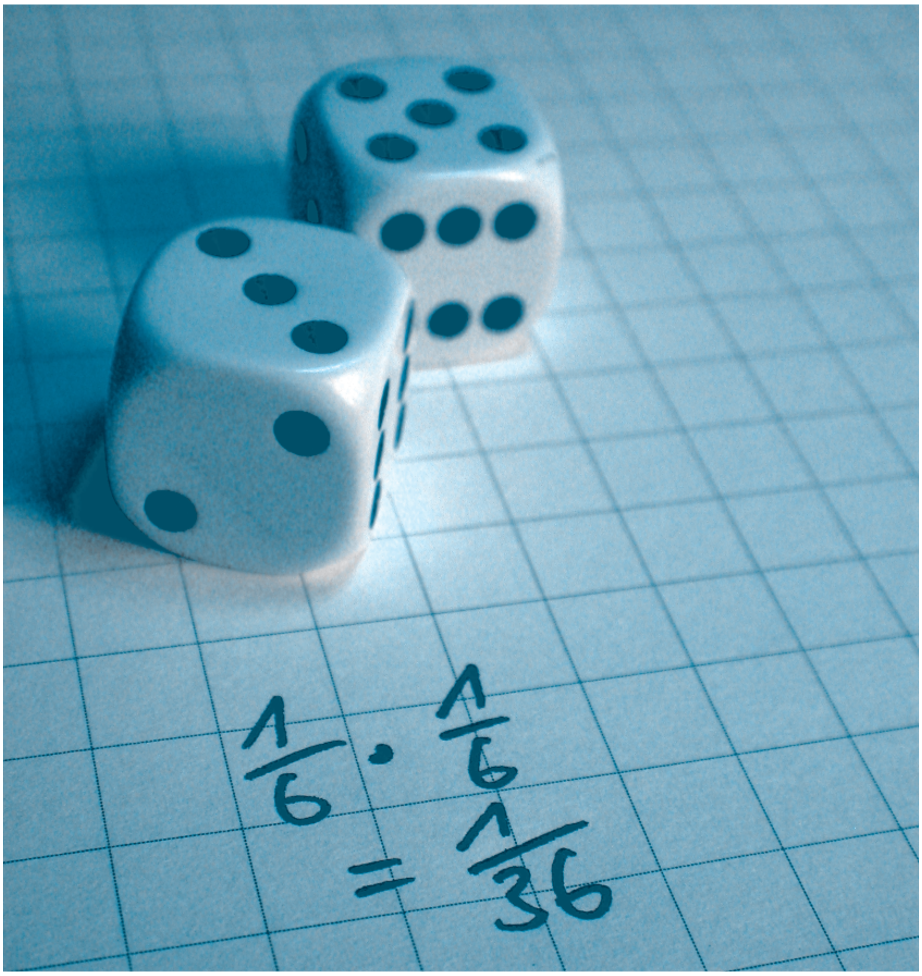
Mehr Informationen zu Praxis der Mathematik in der Schule unter:
www.aulis.de/zeitschriften/math

Heft 4:

Den Zufall im Griff

Stochastische Vorstellungen entwickeln

Aulis Verlag Deubner
Köln und Leipzig



Darf das denn wahr sein?

– Eine schüleraktive Entdeckung der Grundidee des Hypothesentestens durch Simulation mit Tabellenkalkulation.

Timo Leuders

Wie gut kann der Mensch den Zufall – etwa die Ergebnisse eines mehrfachen Würfelwurfs – imitieren? Diese Frage ist Ausgangspunkt einer Sequenz, in der Schülerinnen und Schüler zunächst solche „vorgestellten Zufallszahlen" mit deskriptiven Mitteln untersuchen. Sie stellen dann Vermutungen über Abweichungen vom echten Zufall auf – z. B. über die Häufigkeit von Paschen und bestimmen per Simulation (mit einer Tabellenkalkulation) die Wahrscheinlichkeit eines vom Menschen „gefälschten" Ergebnisses. So entdecken sie selbsttätig das Grundprinzip des Hypothesentestens.

Zu Beginn ein kleines Szenario:

Menschenkenntnis oder purer Zufall?

Peter und Svenja spielen unter der Bank „Centpoker". Jeder legt verdeckt eine Cent-Münze hin. Haben beide Kopf oder beide Zahl bekommt Peter beide Münzen. Haben sie unterschiedliche Seiten gelegt, streicht Svenja beide Münzen ein. Jeder versucht hinter die Taktik des anderen zu kommen.

Peter hat in den letzten Tagen schon viel Geld gegen Svenja verloren. Offensichtlich ist er leicht zu durchschauen. Er holt sich bei seinem Bruder einen Tipp ab: Er soll keine Taktik verfolgen, sondern immer zufällig mal Kopf mal Zahl legen, dann hätte Svenja keine Chance.

Wieder verliert er ständig! Sein Bruder sagt: „Dann hast du halt nicht wirklich zufällig gewählt. Vielleicht bevorzugst du ja Kopf oder legst häufig abwechselnd?"

Stimmt das? Oder ist Peter Reihenfolge doch richtig zufällig?

KZKKZZKKZZKKKZZKZKKZKZK-ZZKZKZKKZKZKZZKZ

Wie kann man mathematisch überprüfen, ob das Legen von Münzen genau so zufällig ist, wie das Werfen der Münzen?

Diese (fiktive) Situation umschreibt eine Gelegenheit, sich mit einem der Grundprobleme des Umgangs mit zufälligen Vorgängen zu beschäftigen: mit dem Schließen unter Bedingungen der Unsicherheit. Zu den großen Leistungen der Mathematik zählt, dass sie hierfür Methoden wie z. B. das Hypothesentesten entwickelt hat. Das Szenario weist aber auch noch auf einen anderen Aspekt hin, nämlich auf die Frage, welches „Gespür" der Mensch auf der einen Seite für Regelmäßigkeiten und auf der anderen Seite für die Muster und Strukturen des Zufalls hat. Diese „Selbsterfahrung" gedanklich zu vertiefen und den Umgang mit den eigenen Vorstellungen mathematisch zu durchdringen, ist eine produktive Gelegenheit für Schülerinnen und Schüler geeignete statistische Verfahren mit Unterstützung des Lehrenden selbst zu entwickeln.

Der klassische Hypothesentest ist eine weit verbreitete Methode, wenn nicht sogar *die* Methode der beurteilenden Statistik. Manche Anwender und Statistiker beklagen seine Dominanz und den unreflektierten Umgang vor allem in der human- und sozialwissenschaftlichen Forschung, was aber zunächst wohl nichts an seiner Beliebtheit ändern wird (vgl. Gigerenzer 1993, Beck-Bornholdt/Dubben 1998). Neben der Suche nach ergänzenden oder ersetzenden Methoden statistischer Absicherung von Vermutungen muss es Zielperspektive mathematischer Bildung sein, einen von Verständnis und Reflexion gekennzeichneten Umgang mit den gängigen Methoden zu fördern. Dies gilt besonders mit Blick auf die künftigen Anwender, deren Kreis immer weiter wächst und alle halbwegs empirisch arbeitenden Disziplinen durchzieht. In der Schülerschaft der gymnasialen Oberstufe rekrutiert sich diese künftige Anwenderschaft nicht nur aus den Schülerinnen und Schüler der Leistungskurse Mathematik, sondern ebenfalls der Grundkurse.

Für einen wissenschaftspropädeutischen Stochastikunterricht in der Schule muss es somit zwei Ziele geben: Hypothesentesten darf nicht exklusive Methode statistischer Absicherung bleiben, vor allem aber sollte Verständnis und Reflexion im Umgang mit dem Hypothesentesten wichtiger sein als die mechanische „Abwicklung“ der Verfahren. Oft findet aber gerade in Grundkursen ein rezeptartiger Umgang mit Mathematik statt: Das Hypothesentesten wird als unverstandenes Schema abgearbeitet – mit Hinweis auf die geringeren Fähigkeiten der Schülerinnen und Schüler beim Argumentieren und beim Verwenden formaler Darstellungen. Wenn man hier Abhilfe schaffen möchte, so kann man einem Prinzip folgen, das bereits seit langem für die Analysis vorgeschlagen wird (Blum / Kirsch 1979): Die Stärkung inhaltlich-anschaulichen Verstehens und Argumentierens. Im dem folgenden Unterrichtsbeispiel wird dargelegt, wie dies mit angemessener Unterstützung durch den Computer gelingen kann.

Hypothesentesten ist kein Pappenstiel

In der Tat ist das Konzept des Hypothesentestens ein hoch anspruchsvolles, durchdrungen von nicht leicht fasslichen Begriffen, wie etwa dem der bedingten Wahrscheinlichkeit oder dem Fehler 1. oder 2. Art. Eine angemessene Interpretation der Annahmen- und Entscheidungszusammenhänge, so wie der hierbei auftretenden Fehlerbegriffe fällt selbst Experten nicht in jedem Fall leicht. Dies spricht dafür, im Unterricht lange bei dem inhaltlichen und auf konkrete, gut zugängliche Beispiele bezogenen Arbeiten zu verweilen, bevor man das Verfahren als Schema auf eine Vielzahl weiterer Situationen anwenden lässt.

Hinzu kommt, dass der hohe Realitätsbezug die Problemsituationen eher komplexer als durchsichtiger macht. Schließlich setzt eine mathematische Behandlung des Hypothesentestens eine Vielzahl von Begriffen aus der Statistik, der Wahrscheinlichkeitsrechung oder der Kombinatorik voraus: Bedingte Wahrscheinlichkeit, Binomialverteilung, Binomialkoeffizienten usw. Die algebraisch auf Schulniveau berechenbaren Fälle sind äußerst beschränkt: Entweder es werden nur Fälle behandelt, die mit der Binomialverteilung „erschlagen“ werden können, oder es werden Formeln als black-box verwendet. Sollte man daher nicht den Hypothesentest aus dem Grundkurs verbannen und sich mit zugänglicheren Problemen befassen? Diese Entscheidung wäre allerdings nicht nur aus bildungstheoretischen Überlegungen fatal, denn die Chancen, die das Umgehen mit Hypothesentests bietet, sind ebenfalls beachtenswert: Im Hypothesentesten fließen viele Begriffe aus Wahrscheinlichkeitsrechnung und beschreibender Statistik produktiv zusammen. Hier können sie nicht nur zusammengeführt und angewendet werden. Man kann sie auch umgekehrt aus Beurteilungssituationen, wie der zu Anfang geschilderten erst herleiten. Zudem bildet Hypothesentesten – trotz der genannten Einschränkungen – einen Kern der heutigen Kultur wissenschaftlichen Erkenntnisgewinns, es spiegelt die Arbeitsweise der empirisch arbeitenden Wissenschaften paradigmatisch wider: Das Aufstellen von Hypothesen, das Erproben im Experiment und das Verwerfen bzw. das vorläufige Akzeptieren nach rationalen Kriterien.

Die Schule sollte die Chance nutzen, vor einer rezeptartigen Verwendung in der Hochschule Grundvorstellungen und tragfähige Ideen aufzubauen.

Wenn also Hypothesentesten im Unterricht stattfinden soll, so sollte man einige Prinzipien beachten:

– Inhaltliches Aufbauen von tragfähigen Begriffen - notwendige Bedingung sind hierzu eine hinreichende Entschleunigung der Begriffsbildung zu Beginn, das Arbeiten auch mit vorläufigen Begriffen und eine hohe Schüleraktivität
– Vermeiden jeglichen rezeptartigen Arbeitens
– Betonung des inhaltlich-anschaulichen Arbeitens gegenüber der Verwendung formaler, symbolischer und algebraischer Elemente
– Wenn möglich und nützlich im Sinne der vorangehenden Punkte: Verwenden der heuristischen und explorativen Möglichkeiten Neuer Medien

Gemäß diesen Prinzipien ist der im Folgenden dargestellte Einstieg in das Hypothesentesten konzipiert und mit Lehrerinnen und Lehrern in Grundkursen erprobt und weiter entwickelt worden.

Der Kern des Unterrichtskonzeptes: Genetisches Erarbeiten der Grundidee des Hypothesentestens

Von einer genetischen Entwicklung des Hypothesentestens kann man sprechen, wenn das Verfahren und die mit ihm verbundenen Begriffe aus einer Problemsituation heraus von Schülerinnen und Schülern aktiv entwickelt werden. Die dem Hypothesentesten zugrunde liegende Argumentationsfigur zeichnet damit auch den roten Faden der Schülererkundungen.

Welches soll nun die Hypothese sein, die man im Unterricht erforscht? Klassisch ist z. B. die Frage, ob ein Würfel, der bei zehnmaligem Würfeln viermal die 3 zeigt, vielleicht gezinkt ist. Bei dieser Frage machen sich Schüler und Schülerinnen auf, die Gesetzmäßigkeiten des (fast) idealen Zufallsgerätes und damit des Zufalls selbst zu erforschen, ihn „in den Griff“ zu bekommen.

Das Thema dieses Heftes (und der einführende Beitrag) betonen aber, dass es wichtig ist, Vorstellungen und Erfahrungen mit dem Zufall, die die Schüler außerhalb des Unterrichts gemacht haben, Ernst zu nehmen und nicht etwa auszublenden. Dies entspricht auch dem Vorschlag von Borovcnik (1992, S. 325):

> *Ein anderer, innovativer Zugang zum Unterricht könnte auch darin liegen, dass die Kommunikation in der Klasse als empirische Forschung begriffen wird. Ziel der Untersuchung sind die intuitiven Vorstellungen des Schülerinnen und Schüler.*

Das folgende Ausgangsproblem setzt diese Idee konsequent um. Es ist durch viele andere analog ersetzbar, stellt aber die Kernidee besonders prägnant dar: Es geht nicht nur um die Analyse von Zufallsprozessen sondern um die Erforschung des eigenen Zufallssinnes.

Schritt 0: Formulieren und Überprüfbar machen der Forschungsfrage

Die übergreifende, dem Lernprozess zu Grunde liegende Erkenntnisfrage, ist hier selbst eine stochastische:

	Fachliche Beschreibung (das ist die Rückschauperspektive der „fertigen Mathematik“)	Inhaltlich-anschauliches Argumentieren aus Sicht der Schülerinnen und Schüler	Konkrete erwartete Schülertätigkeiten bei der Erarbeitung eines Verfahrens
(i)	Man bildet eine Hypothese H und beobachtet einen Ausgang A. (Oft wählt man hier das Gegenteil der eigenen Vermutung, die man ja absichern will)	Du behauptest der Würfel sei in Ordnung? Ich habe aber 6 mal die 6 gewürfelt!	Festlegen einer zu untersuchenden Situation einer erhebbaren Größe und konkurrierender Annahmen, Bestimmen des Ausgangs
(ii)	Man fragt: Wenn H richtig ist, wie wahrscheinlich ist dann A?	Wenn der Würfel in Ordnung wäre, wäre das zwar möglich, aber extrem unwahrscheinlich	Berechnung oder Simulation einer erwarteten Verteilung, Beurteilung der möglichen Ausgänge nach abgestufter Wahrscheinlichkeit
(iii)	Man nimmt unwahrscheinliche Ausgänge A zum Anlass, die Hypothese H zu verwerfen. (Meist legt man die genauen Verwerwungskriterien vorher fest)	Also glaube ich dir nicht! Natürlich könnte ich mich irren und du hast doch Recht. Das ist aber extrem unwahrscheinlich.	Bestimmen von Kriterien für eine Ablehnungsentscheidung, Beurteilung der Situation aus Sicht der gemachten Annahmen

Kasten 1: Vorgehen bei der Erarbeitung des Hypothesentestens

Wie gut ist der „Zufallssinn“ des Menschen ausgeprägt? Konkreter: Kann ein Mensch glaubwürdig den Zufall hervorbringen?

In der Informatik ist dieses Problem bekannt als die Güte von (Pseudo-) Zufallsgeneratoren. Wie aber steht es mit dem menschlichen Zufallsgenerator? Dies ist eine Frage, die in der Psychologie gestellt und mit Werkzeugen der beurteilenden Statistik untersucht werden kann. Schülerinnen und Schüler können diese Vorgehensweise anhand des genannten Problems selbst entwickeln.
Schnell finden sich in der Schülergruppe Vorschläge, was man untersuchen könne, so genannte „Operationalisierungen“ der Forschungsfrage:

- Vorgestelltes (heutzutage würde man sagen: „virtuelles“) Würfeln: Aufschreiben einer möglichst „echten“ Reihe von Augenzahlen
- Vorgestelltes Münzwerfen: Aufschreiben einer möglichst echten Reihe von Wappen und Zahl-Ausgänge
- Vorgestelltes Ziehen der Lottozahlen: Aufschreiben eines Ergebnisses einer Lottoziehung.
- usw. …

Das zweite Experiment behandelt beispielsweise Eichelsbacher (2004), analysiert es fachlich und beschreibt eine Unterrichtssituation. Dort wird allerdings die erwartete Verteilung der Längen der Wiederholungen kombinatorisch berechnet. Diese Berechnung stellt für Schülerinnen und Schüler ein kaum zu leistendes Unterfangen dar. Wie man im Grundkurs auch ohne solche formal-technischen Kenntnisse fortschreiten kann, zeigen die folgenden Ausführungen.
In diesem Beitrag wird das Vorgehen an Hand des ersten Experiments, des vorgestellten Würfelns, näher ausgeführt. Schülerinnen und Schüler diskutieren den Umfang und die Anlage der Erhebung und entwerfen zu den „vorgestellten Zufallsprozessen“ einen Fragebogen. Hierzu kann der Lehrer vorsichtige Ratschläge bezüglich der Anlage und des Umfangs der Erhebung geben, auch wenn zu diesem Zeitpunkt noch nicht immer eine schlüssige Begründung hierfür gegeben werden kann. Es entsteht dann ein Fragebogen wie etwa der aus der Kopiervorlage auf S. 11.
Die Wahl der Ausgangsfrage und die Konstruktion des Fragebogens kann man Schülerinnen und Schülern überlassen und damit mit ihnen den ganzen Forschungsprozess durchlaufen. Es ist aber auch möglich, mit dem Vorlegen eines fertigen Fragebogens zu beginnen und anhand der Ergebnisse die Forschungsfrage erst zu motivieren.

Schritt 1: Anlage und Durchführung des Experiments
Die Schülergruppen erhalten bzw. geben sich dann den Auftrag:

Vorgestelltes Würfeln: Stell dir vor, du würfelst zwanzig Mal mit einem Würfel. Notiere eine Folge von Ergebnissen (1,2,3,4,5 oder 6), wie sie wahrscheinlich auftreten werden.

Will man Zeit sparen, so kann man zusätzlich vorschlagen:

Wenn Ihr zu zweit, dritt, viert, fünft oder sechst arbeitet, teilt euch die Arbeit auf, würfelt parallel und setzt dann die Ergebnisse willkürlich hintereinander.

Auf diese Weise untersucht man die „mittlere Zufallsfähigkeit“ einer großen Zahl von Personen. Individuelle Unterschiede gehen hier in der Menge unter oder mitteln sich sogar heraus. Man verliert dann allerdings die Möglichkeit, später gegebenenfalls nach ausgeprägten Unterschieden zwischen verschiedenen Personen zu forschen.
Man kann solche unterschiedlichen „Designs“ und ihre Vor- und Nachteile mit den Schülerinnen und Schülern zusammen erarbeiten und dann eines auswählen. Dabei denken sie allerdings bereits so viel über das zu untersuchende Phänomen

Fragebogen

1. Vorgestelltes Münzwerfen: Stell dir vor, du wirfst zwanzig Mal mit einer Münze. Notiere hier eine Folge von Ergebnissen K (für Kopf) oder Z (für Zahl), wie sie wahrscheinlich auftreten werden.

2. Vorgestelltes Würfeln: Stell dir vor, du würfelst zwanzig Mal mit einem Würfel. Notiere hier eine Folge von Ergebnissen (1, 2, 3, 4, 5 oder 6), wie sie wahrscheinlich auftreten werden.

3. Vorgestelltes Ziehen der Lottozahlen: Stell dir vor, die Lottomaschine ist kaputt. Du ziehst zehn Wochen hintereinander ganz zufällig 6 aus 49. Notiere hier eine Folge von Lottoergebnissen, wie sie wahrscheinlich auftreten werden.

1	2	3	4	5	6	7
8	9	10	11	12	13	14
15	16	17	18	19	20	21
22	23	24	25	26	27	28
29	30	31	32	33	34	35
36	37	38	39	40	41	42
43	44	45	46	47	48	49

1	2	3	4	5	6	7
8	9	10	11	12	13	14
15	16	17	18	19	20	21
22	23	24	25	26	27	28
29	30	31	32	33	34	35
36	37	38	39	40	41	42
43	44	45	46	47	48	49

1	2	3	4	5	6	7
8	9	10	11	12	13	14
15	16	17	18	19	20	21
22	23	24	25	26	27	28
29	30	31	32	33	34	35
36	37	38	39	40	41	42
43	44	45	46	47	48	49

1	2	3	4	5	6	7
8	9	10	11	12	13	14
15	16	17	18	19	20	21
22	23	24	25	26	27	28
29	30	31	32	33	34	35
36	37	38	39	40	41	42
43	44	45	46	47	48	49

1	2	3	4	5	6	7
8	9	10	11	12	13	14
15	16	17	18	19	20	21
22	23	24	25	26	27	28
29	30	31	32	33	34	35
36	37	38	39	40	41	42
43	44	45	46	47	48	49

1	2	3	4	5	6	7
8	9	10	11	12	13	14
15	16	17	18	19	20	21
22	23	24	25	26	27	28
29	30	31	32	33	34	35
36	37	38	39	40	41	42
43	44	45	46	47	48	49

1	2	3	4	5	6	7
8	9	10	11	12	13	14
15	16	17	18	19	20	21
22	23	24	25	26	27	28
29	30	31	32	33	34	35
36	37	38	39	40	41	42
43	44	45	46	47	48	49

1	2	3	4	5	6	7
8	9	10	11	12	13	14
15	16	17	18	19	20	21
22	23	24	25	26	27	28
29	30	31	32	33	34	35
36	37	38	39	40	41	42
43	44	45	46	47	48	49

1	2	3	4	5	6	7
8	9	10	11	12	13	14
15	16	17	18	19	20	21
22	23	24	25	26	27	28
29	30	31	32	33	34	35
36	37	38	39	40	41	42
43	44	45	46	47	48	49

1	2	3	4	5	6	7
8	9	10	11	12	13	14
15	16	17	18	19	20	21
22	23	24	25	26	27	28
29	30	31	32	33	34	35
36	37	38	39	40	41	42
43	44	45	46	47	48	49

nach, dass sie beim Auswürfeln der Zahlen nicht mehr sonderlich unvoreingenommen sind. Hier bietet es sich an, den Kurs die auszuwertenden Daten durch Befragung einer anderen Schülergruppe (z. B. eines parallelen Deutschkurses) erheben zu lassen. Dabei ist auch die Frage der Vor- und Nachteile einer Erhebung mit Bleistift und Papier oder direkt am Computer zu diskutieren.

Schritt 2: Aufstellen der Untersuchungsfrage

Nun sollt Ihr überprüfen, wie gut ihr dabei wart, einen Würfel zu simulieren. Sucht Eigenschaften einer Augenzahlenfolge, die vielleicht bei einem echten Würfel anders ausfallen, als bei einem vorgestellten.

Hier wird den Lernenden bewusst offen gelassen, nach welchem Kriterium sie die Daten untersuchen sollen. Jede Gruppe kann eigene Vermutungen aufstellen, die Schülerinnen und Schüler sind damit die Akteure der Hypothesenbildung. Im konkreten Unterrichtsversuch ergaben sich u. a. die folgenden Vermutungen:

a) Beim vorgestellten Würfeln sind die Sechsen seltener als beim echten, da man beim Spielen meist lange auf die Sechs warten muss.
b) Beim vorgestellten Würfeln kommt jede Zahl etwa gleich häufig vor. Beim echten Würfel kann es eher mal passieren, dass eine Zahl häufiger oder eine seltener ist.
c) Beim vorgestellten Würfeln ist der Mittelwert aller Ergebnisse kleiner, weil man hohe Zahlen subjektiv seltener würfelt.
d) Beim vorgestellten Würfeln kommen seltener Zweier-, Dreier oder Viererpasche vor als beim echten, weil man Pasche für seltener hält als sie tatsächlich sind.

Bei einem üblichen Unterrichtsgang würde man nun solche Vermutungen auswählen und zur Grundlage eines Hypothesentests machen, die sich wahrscheinlichkeitstheoretisch eher leicht modellieren lassen, wie etwa die Anzahl der Sechser, die mit einer einer Binomialverteilung modelliert werden kann. Andere sind bei weitem schwieriger „rechnerisch in den Griff zu bekommen“. In einem solchen Unterrichtskonzept wählt also der Lehrer aufgrund seiner Vorkenntnisse aus.

Man kann aber auch ganz anders vorgehen und dabei auf eine rechnerische Modellierung der Verteilungen gänzlich verzichten. Dies ist die besondere Eigenart des hier geschilderten Vorgehens. Ihre Vorzüge (und Nachteile) werden im Anschluss diskutiert werden.

Schritt 3: Deskriptive Untersuchung der vermuteten Zusammenhänge

Die Schülergruppen bearbeiten ihre Hypothesen zunächst gänzlich ohne weitere Vorgaben. Sie wenden dazu ihre Kenntnisse aus der beschreibenden Statistik an und versuchen, ihre Aussagen durch die Ermittlung angemessener Kenngrößen zu quantifizieren. Hierbei haben sie innerhalb ihrer Hypothese noch viel Spielraum für unterschiedliche Modellierungen. Hier einige Beispiele:

a) Hypothese: „Beim vorgestellten Würfel sind die Sechsen seltener als beim echten, da man beim Spielen meist lange auf die Sechs warten muss.“

Die Schüler zählen also die Sechsen aus und vergleichen dies mit ihrer theoretischen Erwartung, die sie auch ohne tiefe Kenntnisse in der Wahrscheinlichkeitsrechnung formulieren können. Das Auszählen vieler Daten kann mit einer Tabellenkalkulation bewerkstelligt werden, z. B. mit ZÄHLENWENN(A1:T20;6). Diese Computerunterstützung ist an dieser Stelle zwar nicht unabdingbar, wird sich später aber als sehr nützlich erweisen. Die Schülerinnen und Schüler werden Abweichungen von der erwarteten Zahl zunächst subjektiv als zu groß, zu klein oder als „im Rahmen“ einschätzen, rational begründen können sie dieses Urteil aber kaum - es entsteht eine produktive Unsicherheit: Sind diese Abweichungen auch bei einem zufälligen Würfeln zu erwarten?

b) Hypothese: „Beim vorgestellten Würfeln kommt jede Zahl etwa gleich häufig vor. Beim echten Würfel kann es eher mal passieren, dass eine Zahl häufiger oder eine seltener ist.“

Diese Schülergruppe geht ähnlich wie die vorige vor. Sie werden feststellen, dass die Häufigkeiten einzelner Zahlen nicht weit von den erwarteten „mittleren Häufigkeiten“ abweichen. Möglicherweise quantifizieren sie die Abweichung der Häufigkeiten von der erwarteten Häufigkeit durch ein Streumaß, etwa die Spannweite oder die mittlere quadratische Abweichung. Wie groß aber wird diese Abweichung bei einem echten Würfel? Ist sie beim vorgestellten Würfel verdächtig klein oder „im Rahmen“? Auch hier stehen sie vor dem Problem der Präzisierung der Abweichung. Außerdem stehen ihnen – anders als bei der mittleren Anzahl von Sechsen – keine Methoden zur Verfügung, wie sie die mittlere Abweichung bei einem normalen Würfel exakt berechnen können.

c) Hypothese: „Beim vorgestellten Würfel ist der Mittelwert aller Ergebnisse kleiner, da man hohe Zahlen subjektiv seltener würfelt.“

Analog zur ersten Hypothese kann diese Schülergruppe den Mittelwert aller Ergebnisse berechnen (z. B. mit MITTELWERT(A1:T20)) und diesen mit dem theoretischen von 3,5, den sie leicht berechnen können, vergleichen. Wie weit aber weicht er bei einem echten Würfeln in der Regel ab? Das lässt sich nicht mehr leicht berechnen.

d) Hypothese: „Beim vorgestellten Würfel kommen Zweier-, Dreier oder Viererpasche, d.h. mehrmals die gleiche Zahl in Folge, seltener vor als beim echten, weil man Pasche für seltener hält als sie tatsächlich sind.“

Die deskriptive Untersuchung dieser Frage ist technisch eher schwierig, da aus den Daten die Zahl der Paschs ermittelt werden muss. Von Hand ist dies mit etwas Arbeitsaufwand zu bewerkstelligen. Bei der Verwendung einer Tabellenkalkulation werden die Schüler vielleicht eine Unterstützung des Lehrenden benötigen. Eine mögliche Zählmethode ist die, eine parallele Tabelle anzulegen und darin den Wahrheitswert des Paarvergleiches auszuwerten:

UND(A1 = A2; A2 =A3)

ist WAHR, wenn dreimal dieselbe Zahl aufeinander folgt. Mit ZÄHLENWENN(AA1:AT20;“WAHR“) kann man die Zahl dieser Fälle bestimmen. Allerdings wertet man dann zweimal einen Dreierpasch als Teil eines Viererpaschs usw. Dies ist durchaus auch eine legitime deskriptive Größe, die man untersuchen kann. *Echte* Pasche kann man aber auch so ermitteln:

UND(A1<>A2;A2=A3;A3=A4;A4<>A5)

Dieses Beispiel ist in Kasten 2 dargestellt. Dort wird statt WAHR / FALSCH eine 1 bzw. 0 angezeigt und die 1 mit Hilfe von „bedingter Formatierung“ herausgehoben.

Neben diesem Problem stoßen in der Regel aber alle Gruppen, unabhängig von der von ihnen gewählten Zielgröße an eine Barriere:

Wie soll man den ausgezählten Wert interpretieren? Ist die Abweichung (von der Theorie oder der intuitiven Erwartung) aussagekräftig? Kann sie nicht auch rein zufällig auftreten?

Die meisten Gruppen kommen entweder zum Schluss, dass der Wert durchaus erwartet werden kann oder dass er verdächtig abweicht, können dies aber nicht quantifizieren.

SUMMENPRODUKT =WENN(UND(A1 <> B1; B1=C1; C1 =D1; D1 <> E1);1;0)

WENN(Prüfung; [Dann_Wert]; [Sonst_Wert])

	A	B	C	D	E	F	G	H	I	J	K																										
1	3	2	6	1	5	5	4	2	3	1	6	4	1	5	6	3	5	6	4	4	=1	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0
2	3	5	2	3	4	3	1	5	4	2	6	2	4	1	5	3	4	6	3	5	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0
3	5	3	6	2	5	1	1	4	6	3	2	6	4	2	3	5	6	1	4	2	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0
4	6	3	5	4	1	4	5	2	3	4	4	2	3	5	1	3	3	3	6	5	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	1	0	0
5	5	3	3	6	2	1	4	5	3	4	1	1	6	4	1	3	2	4	3	5	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0
6	2	5	3	3	1	4	2	4	6	2	5	5	2	6	6	1	3	5	2	1	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0
7	3	5	3	6	3	2	1	5	4	3	2	1	1	1	1	5	6	5	4	4	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0
8	1	2	4	1	5	5	6	3	2	4	1	6	5	3	2	4	4	1	6	2	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0
9	4	5	1	3	6	1	2	5	1	4	6	5	3	3	4	1	4	2	6	2	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0
10	1	4	6	5	2	2	1	3	4	6	6	1	6	2	5	3	2	1	4	4	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0
11	6	1	6	6	6	1	4	3	2	6	2	3	6	2	3	6	6	4	3	6	0	1	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0
12	4	6	2	3	1	1	5	4	3	3	2	6	1	3	6	5	2	3	5	1	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0
13	5	3	1	6	2	3	5	6	2	3	1	4	2	5	3	1	6	5	2	4	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0
14	6	3	2	1	4	5	4	3	5	2	1	2	6	3	4	2	5	1	6	3	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0
15	3	5	1	5	4	3	2	6	4	6	2	2	3	4	6	1	1	5	3	2	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0
16	5	6	2	4	1	2	5	4	4	3	4	6	1	5	4	4	2	1	3	6	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0
17	3	5	1	2	2	6	4	3	1	1	6	4	2	3	6	6	1	5	3	1	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0
18	5	2	3	5	4	1	1	2	5	3	5	1	1	6	6	2	4	6	3	2	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0
19	3	2	4	6	1	4	5	3	2	6	4	1	2	5	4	3	2	6	4	2	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0
20	1	2	4	5	6	3	2	4	4	1	2	6	3	3	5	4	1	6	1	2	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0
21	1	2	2	5	3	1	6	5	4	3	1	2	2	6	3	5	4	2	1	2	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0
22	2	1	1	3	4	6	1	2	5	5	3	6	6	6	2	4	3	1	1	2	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	1	0	0	0	0	0	0
23	2	4	5	6	3	5	3	1	6	2	4	4	3	5	2	1	1	3	6	2	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0
24	3	2	6	4	1	2	5	3	3	1	6	4	2	3	5	1	4	4	2	5	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0
25	1	2	5	1	2	4	1	2	6	6	3	2	1	6	3	2	4	1	2	6	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0

Kasten 2: Nur Dreierpasche? Ist das nicht ein bisschen wenig?

Viele weitere „Verdachtshypothesen“ sind möglich. Die Leistung der Schüler besteht darin, diese zu quantifizieren, also mit Mitteln der deskriptiven Statistik zunächst zu beschreiben, zu berechnen und darzustellen.

Je nach Wahl der Zielgröße (Anzahl der Sechsen, mittlere Abweichung vom Mittelwert, Zahl der Pasche usw.) können nun manche der Schülergruppen die theoretisch erwarteten Werte, wie z. B. den erwarteten Mittelwert bestimmen und mit den ausgezählten Daten vergleichen. Andere Zielgrößen (Zahl der Pasche) sind dem Vergleich mit theoretisch erwarteten Werten weniger zugänglich.

Schritt 4: Simulation der empirischen Verteilungen

Diese Problemsituation ist der Ausgangpunkt für die (Nach)Erfindung der Grundidee des Hypothesentestens: Wenn man eine Abweichung von einem erwarteten Wert beurteilen will, so muss man einschätzen, welche Abweichungen mit welcher Wahrscheinlichkeit auftreten können.

Bei ihrer Arbeit stehen den Schülerinnen und Schülern im Wesentlichen drei Wege offen:

(a) Eine **rechnerische Bestimmung** der Wahrscheinlichkeit einzelner Werte der Zielgröße. Hierzu benötigen sie kombinatorische Grundkenntnisse bzw. leiten die Wahrscheinlichkeiten elementar nach einem Laplace-Ansatz ab. Schwierigkeiten, die hierbei auftreten sind z. B.:

- Fehler in der Modellierung (z. B. beim Aufzählen von Ausgängen)
- Zu schwierige Berechnung komplexer Zielgrößen (manchmal hilft noch eine Baumdarstellung)
- Unsicherheit der Interpretation: Auch der wahrscheinlichste Ausgang kann als einzelner Ausgang sehr unwahrscheinlich sein – wie ist das zu interpretieren?

Wenn die Schüler einen korrekten rechnerischen Ansatz gefunden haben und nur noch am dritten Punkt hängen, so sollten sie sich einen tabellarischen und grafischen Überblick über die gesamte Häufigkeitsverteilung machen. Dieser Faden wird weiter unten wieder aufgegriffen.

(b) Vor allem, wenn die rechnerische Bestimmung scheitert oder die Modellierung Schwierigkeiten macht, können Schüler auf die Idee verfallen, die Ausgänge des Experiments zu untersuchen, indem sie **das Experiment konkret durchführen**. Sind Würfel oder Münzen zugänglich, so kommt manche Gruppe darauf, das Experiment per Hand auszuführen, um ihre Vermutungen zu den Ausgängen zu untersuchen. Sicherlich können Sie die 500 Würfe aus dem Beispiel schnell durchführen. Dann haben sie aber wieder nur *einen* Wert für die betrachtete Zielgröße. Dieser kann ja auch zufällig höher oder tiefer ausfallen, als im erwarteten Mittel. Um das zu beurteilen müssten sie die 500 Würfe noch mehrere weitere Male durchführen. Dabei stellen sie aber schnell fest, dass sie eine unpraktikabel große Zahl von Versuchen brauchen werden.

(c) Da die Schülerinnen und Schüler bereits mit der Tabellenkalkulation arbeiten, um ihre Daten deskriptiv zu untersuchen, können sie dasselbe Werkzeug auch verwenden, um **die Daten des Zufalls zu simulieren**. Sie fragen sich zunächst:

Welchen Wert hätte die Zielgröße, wenn man ein reales Zufallsexperiment durchführen würde?

Als Hilfe (etwa in Form eines Tutoriums oder Werkzeugzettels) brauchen sie lediglich die Anleitung zur Erzeugung von gleichverteilten Zufallszahlen, also im Falle des Würfels, z. B.

AUFRUNDEN(ZUFALLSZAHL()*6 ; 0)

(Die Simulation des Lottos ist etwas schwieriger, da es sich um Ziehen ohne Zurücklegen handelt). Während die Tabellenkalkulation bisher eher noch entbehrlich war, so ist sie für die folgenden Schritte ein maßgebliches Werkzeug. Ihr Vorteil besteht darin, dass die Schüler lediglich in den Datenzellen die festen Daten durch den Befehl für Zufallsdaten ersetzen müssen. Alle anderen Auswertungszellen, mit denen sie die Daten deskriptiv beschrieben haben (also z. B. Kennwerte, Grafiken) rechnen nun auf den Daten des „tatsächlichen" Zufalls (s. Kasten 3).
Ob die Schülerinnen und Schüler diesen Schritt selbstständig vollziehen, oder ob hier die grundsätzliche Idee für die Weiterarbeit im Klassengespräch erarbeitet werden sollte, hängt von den Vorerfahrungen der Schülerinnen und Schüler ab. Haben sie bereits öfter den Zufall mit Hilfe einer Tabellenkalkulation simuliert, so werden einige Gruppen den nächsten vielleicht bereits von selbst tun.
Von der jeweils untersuchten Hypothese und den erhobenen Daten hängt nun ab, wie deutlich sich eine Vermutung aufdrängt. Im hier dargestellten Beispiel, zeigt sich, dass rein zufällig schon 9 Dreierpaschs auftreten, beim vorgestellten Würfel waren es nur 3 – ein deutliches Zeichen für die Tendenz des Menschen Wiederholungen zu vermeiden, weil er solche Wiederholungen nicht als vereinbar mit seinen Vorstellungen vom Zufall ansieht? Hier scheinen die Schüler einem typischen Vorurteil beim intuitiven Umgehen mit dem Zufallsbegriff auf die Schliche gekommen zu sein. Ihre Hypothese scheint plausibel.
Auf den zweiten Blick erscheint dieser Schluss aber vorschnell – oder aber man kann die Schüler leicht durch kritische Fragen verunsichern: Können diese neun Pasche nicht auch durch Zufall aufgetreten sein? Kann es nicht auch vorkommen, dass kein Pasch auftritt?
Welche Hypothese die Schüler auch aufgestellt haben, immer müssen sie diese Frage diskutieren und sich darüber verständigen, wann sie eine Abweichung als bedeutsam ansehen und wann nicht. Die Meinungen hierüber klaffen meist weit auseinander. Es gibt Schülerinnen und Schüler, die die Möglichkeit auch extremer Ergebnisse betonen und keinen Anlass darin sehen, die ausgedachten Zufallsdaten als nicht zufällig abzulehnen.
Offensichtlich besteht in einer solchen Situation Bedarf nach einer Präzisierung oder Quantifizierung. Hier liegt genau die Ausgangssituation für den Grundgedanken der beurteilenden Statistik vor: Zufällige Abweichungen quantitativ erfassen, um sie systematisch und kontrolliert beurteilen zu können. Den ersten Schritt in diese Richtung gehen die Schülerinnen und Schüler, wenn sie, um ihren Dissens zu klären, weitere Zufallsergebnisse erzeugen – z. B. nach der Anleitung auf dem Werkzeugzettel:

Neue Zufallszahlen erzeugen mit **F9**

Beim Würfeln per Hand, wäre dieser Schritt praktisch sehr aufwändig und kaum eine Schülergruppe käme auf die Idee, ihn wirklich durchzuführen. Bei der Verwendung der Tabellenkalkulation ist es hingegen nahe liegend, sich durch mehrmaliges Drücken von **F9** einen groben Überblick über die Verteilung der Zielgröße zu verschaffen. Schülerinnen und Schüler präzisieren ihre obige Frage dann auf folgende Weise:

> Welche Werte nimmt die Zielgröße typischerweise an, wenn man ein reales Zufallsexperiment durchführen würde?

Dieser erste Zugang ist noch intuitiv, kann aber zu einer Klärung zwischen extremen Ansichten führen. Die Schülerinnen und Schüler sehen, dass sich die Größe in einem bestimmten Bereich bewegt und diesen nur sehr selten verlässt. Sind sie etwa auch beim zwanzigmaligem Simulieren noch immer nicht in die Nähe des Wertes aus den Daten gekommen, so bildet sich bereits ein Urteil: „Das kann doch kein Zufall sein …" Liegt die berechnete Zielgröße innerhalb des Bereichs, der auch zufällig erscheint, so bildet sich das Urteil: „Das könnte auch bei echten Zufallszahlen entstanden sein …". Die Grundidee der beurteilenden Statistik ist zwar noch nicht quantifiziert, aber bereits voll ausgeprägt.

Kasten 3: Auszählen von Dreierpaschen beim echten (vom Computer simulierten) Zufallswürfeln

A1 =AUFRUNDEN(ZUFALLSZAHL()*6; 0)

	A	B	C	D	E	F	G	H	I	J	K	L	M	N	O	P	Q	R	S	T	U	V	W	X	Y	Z	AA	AB	AC	AD	AE	AF	AG	AH	AI	AJ	AK	AL
1	2	4	3	1	3	6	6	6	2	4	6	4	2	1	4	2	2	4	2	6		0	0	0	0	1	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0
2	2	2	3	5	3	3	4	4	4	4	6	2	4	2	5	3	3	5	2	2		0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0
3	2	3	4	1	6	2	4	3	5	3	2	6	6	6	6	5	3	4	6	1		0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0
4	5	3	6	5	3	6	1	1	3	5	6	3	1	4	5	2	4	2	6	3		0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0
5	4	2	6	3	6	1	5	2	6	6	2	6	5	3	5	1	3	2	5	4		0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0
6	3	3	4	1	6	4	6	6	1	2	3	4	2	6	5	2	1	5	1	3		0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0
7	6	4	6	6	5	5	6	6	4	1	1	2	1	2	5	2	2	4	5	2		0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0
8	4	5	1	1	1	3	6	6	5	2	1	6	5	5	5	3	2	1	5	3		0	1	0	0	0	0	0	0	0	0	0	1	0	0	0	0	0
9	4	6	1	5	2	3	6	6	2	3	6	3	5	1	3	1	2	3	1	6		0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0
10	4	5	3	5	2	6	2	1	5	1	4	4	2	2	5	6	2	3	2	4		0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0
11	6	1	6	4	4	4	1	3	6	1	5	6	1	2	2	2	3	6	1	1		0	0	1	0	0	0	0	0	0	0	0	0	1	0	0	0	0
12	6	6	2	4	1	1	1	3	5	1	6	2	1	5	2	5	3	4	1	1		0	0	0	1	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0
13	5	6	4	3	5	2	5	1	5	2	4	3	3	2	6	3	1	5	4	3		0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0
14	1	6	6	1	3	1	5	3	4	2	4	6	6	6	5	5	3	3	2	2		0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	1	0	0	0	0	0	0
15	3	1	2	1	2	1	3	1	4	6	4	2	1	4	3	2	3	2	5	2		0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0
16	5	3	2	6	2	5	1	3	6	6	6	6	6	3	3	3	3	3	5	2		0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0
17	3	4	1	6	3	5	2	6	4	3	1	5	3	4	3	6	5	3	2	6		0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0
18	5	3	1	5	3	3	6	1	4	6	2	2	3	3	6	2	1	4	4	2		0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0
19	1	2	5	1	2	4	4	6	6	4	4	2	1	4	4	5	6	6	2	6		0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0
20	5	5	6	4	5	2	3	6	2	3	6	1	5	3	5	6	2	4	6	6		0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0
21	4	4	6	6	6	4	2	2	1	4	3	3	1	1	2	1	1	2	5	4		0	1	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0
22	6	5	1	6	5	3	6	2	6	1	1	6	1	3	5	4	3	4	6	4		0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0
23	3	2	2	2	5	1	6	5	6	4	1	6	5	2	6	3	6	4	2	1		1	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0
24	4	6	4	5	1	1	2	4	5	4	1	4	3	6	3	5	3	1	4	1		0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0
25	3	3	3	6	4	5	1	1	4	2	2	3	6	6	2	6	5	4	6	5		0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0

Schritt 5: Darstellung der empirischen Verteilung

Erfahrungsgemäß gibt es nur wenige Schülergruppen, die sich selbstständig einen grafischen oder tabellarischen Überblick über die Verteilung der simulierten Zufallsgröße verschaffen, z. B. indem sie die Ergebnisse in der Tabelle festhalten, auszählen und grafisch darstellen. Es kann daher sinnvoll sein, an einer Schnittstelle den Stand der Gruppenarbeit zu vergleichen und ein gemeinsames weiteres Vorgehen zu vereinbaren.

- Alle Gruppen beschreiben die von ihnen gewählte Zielgröße
- Sie teilen den ermittelten Wert der im Fragebogen erhobenen Zielgröße mit
- Diejenigen Gruppen, die eine theoretische Verteilung der Zielgröße berechnen konnten, beschreiben, wie die ermittelte Zielgröße in dieser Verteilung liegt und welche Schlüsse sie daraus ziehen.
- Diejenigen, die nur Einzelwerte der Zielgröße simuliert haben erkennen dabei, dass es sinnvoll sein kann, diese Verteilung auch darzustellen.

Nun kann man vereinbaren, dass alle Gruppen (auch die, die bereits eine theoretische Verteilung erzeugt haben)
- eine empirische Verteilung durch Simulation ermitteln
- diese tabellarisch und grafisch darstellen
- sie soweit möglich mit der theoretischen vergleichen

Probleme entstehen dabei vor allem dadurch, dass es einer ganzen Reihe von simulierten Werten bedarf, um eine Übersicht über die empirische Verteilung zu bekommen. Dies trifft insbesondere dann zu, wenn es eine große Zahl von unterschiedlichen Werten gibt, z.B. wenn Schülerinnen und Schüler die Summe von 20 Würfen wählen. Hier kann es sinnvoll sein, die Werte zu Klassen zusammenzufassen. Dieses Vorgehen sollte aber nach Möglichkeit aktiv von den Schülerinnen und Schülern vollzogen werden, mit dem Ziel, sich einen möglichst guten Eindruck von der empirischen Verteilung ihrer Zielgröße zu verschaffen.

Grundsätzlich sind zwei Vorgehensweisen denkbar:

(a) Eine Erzeugung der empirischen Verteilung **von Hand:**

Durch mehrmaliges Drücken von $\boxed{F9}$ ergeben sich immer neue Werte, die man z. B. durch Kopieren in immer neue Tabellenzellen oder per Hand sammelt und auszählt. Bei der Arbeit bemerken die Schüler dann nach und nach, wie viele Werte sie benötigen, bzw. sie erkennen, dass eine Einteilung in Klassen zu einer „stabileren" grafischen Verteilung führt.

(b) Eine Erzeugung der empirischen Verteilung **mit Hilfe der Funktionen der Tabellenkalkulation:**

In der Regel erzeugt ein Tabellenkalkulationsprogramm einen Wert (z. B. die Zahl der Dreierpasche) und überschreibt diesen bei erneutem Würfeln mit $\boxed{F9}$. Mit einem kleinen Trick lassen sich aber auch eine ganze Reihe von Werten automatisch in aufeinander folgenden Tabellenzellen sammeln und auswerten (s. technischer Hinweis am Ende des Artikels)

Ob sie nun die Zufallswerte von Hand oder automatisch sammeln, am Ende haben die Schülerinnen und Schüler eine Übersicht über die Verteilung der untersuchten Größe. Im Beispiel sind das die absoluten Häufigkeiten der Anzahlen von Dreierpaschen, wenn man 100 mal jeweils 25 × 20 Würfe untersucht (s. Kasten 4).

Es zeichnet sich ganz deutlich eine eingipflige Verteilung um einen experimentell und näherungsweise bestimmten Mittelwert von etwa 8–9 Dreierpaschen ab.

Auf diese Weise gewinnen die Schülerinnen und Schüler nach und nach einen Überblick, wie bestimmte Ausgänge, wie etwa die nur 3 Dreierpasche aus dem vorgestellten Würfeln zu beurteilen sind.

Die tabellarischen und graphischen Ergebnisse der verschiedenen Gruppen ergeben alle ein ähnliches Bild. Sie werden präsentiert und dienen zur Erarbeitung eines kontrollierten Beurteilungsverfahrens.

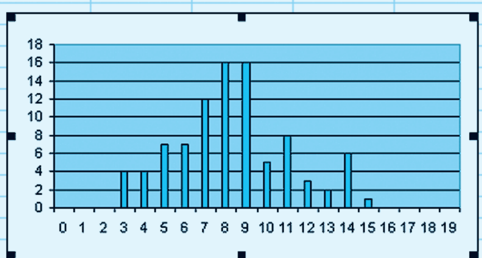
Schritt 6: Erarbeiten eines kontrollierten Verfahrens zur Beurteilung

Die Schülerinnen und Schüler haben sich anfangs an dem Problem gestoßen, dass sie die Abweichung der Zielgröße vom empirischen (oder theoretischen) Mittelwert zwar berechnen aber nicht in ihrer Bedeutung beurteilen konnten. Mit dem eben beschriebenen Simulationsverfahren lässt sich für jede deskriptive Größe, die die Schülerinnen und Schüler für beachtenswert halten und auswerten, eine empirische Verteilung näherungsweise gewinnen. Die Frage ist nun: Wie unwahrscheinlich ist ein ausgezähltes Ereignis, wie z. B. die drei Dreierpasche?

Das nun meist auftretende Problem ist, dass die Wahrscheinlichkeiten einzelner Ereignisse immer klein oder sehr klein sind: 8 Dreierpasche sind zwar häufiger als 3, als Einzelereignis liegen 8 Dreierpasche, wie dem Versuch und der Graphik zu entnehmen ist, aber auch nur bei ca.

Kasten 4

AM		AO Versuch Nr.	AP Anzahl der 3er Pasche	AR Anzahl	AS Häufigkeit
3er Pasche	5	1	6	0	0
Zähler	61	2	6	1	0
		3	12	2	0
		4	7	3	4
		5	5	4	4
		6	12	5	7
		7	5	6	7
		8	9	7	12
		9	8	8	16
		10	10	9	16
		11	13	10	5
		12	9	11	8
		13	4	12	3
		14	5	13	2
		15	14	14	6
		16	9	15	1
		17	4	16	0
		18	11	17	0
		19	8	18	0
		20	8	19	0
		21	8		
		22	9		
		23	8		
		24	10		



16%. Hier kann in einem Klassengespräch (oder bei der individuellen Unterstützung der Gruppenarbeit) die Frage gestellt werden, wo denn die meisten (also z. B. 90%) aller Werte liegen. Das reicht meist aus, um die Konstruktion eines symmetrischen Intervalls um den Mittelwert zu motivieren.

Rückblick und Ausblick

Die Schrittfolge, die in diesem Beitrag entfaltet wurde, zeigt auf, wie das grundlegende Prinzip des Standardverfahrens für den Hypothesentest problemorientiert und genetisch entwickelt werden kann:
Ausgangspunkt ist ein Erkenntniswunsch, wie er in der Psychologie, also einem realen Anwendungsgebiet beurteilender Statistik, typischerweise entstehen kann: „Welche unbewusste Vorurteile über den Zufall haben Menschen?“ konkretisiert an der Fragestellung „Wie gut können Menschen den Zufall simulieren?“ Diese Frage schafft eine Verankerung der Arbeit in einem Problem, das die Vorerfahrungen und Alltagsvorstellungen der Schülerinnen und Schüler konsequent zum Ausgangspunkt systematischer Untersuchungen nimmt.
Die Bearbeitung des Problems mündet in die Entwicklung zentraler Begriffe und Methoden der beurteilenden Statistik. Der Prozess des Aufstellens, Überprüfens und ggf. Verwerfens einer Hypothese ergibt sich automatisch aus der Behandlung des konkreten Problems. Es liegt somit ein genetischer Erarbeitungsansatz vor.
Die Verwendung einer Tabellenkalkulation erlaubt eine über weite Strecken schüleraktive Erarbeitung, die man als „handlungsorientiert“ bezeichnen könnte, in dem Sinn, dass die Schüler aktiv handelnd mit selbst erhobenen bzw. simulierten Daten umgehen.
Schülerinnen und Schüler bauen auf ihren Vorkenntnissen in der deskriptiven Statistik auf. Durch die simulierende Verwendung der Tabellenkalkulation benötigen sie kaum oder keine zusätzliche Bereitstellung von Begriffen und technischen Verfahren der Wahrscheinlichkeitsrechnung oder Kombinatorik. Zudem können sie die sie interessierenden Größen selbst auswählen, da es keine Einschränkungen durch die mehr oder weniger gute Berechenbarkeit der gewählten Größen gibt. Jede deskriptive Größe, die sie wählen (Mittelwert, Streumaß, Häufigkeit bestimmter Ereignisse) kann ohne weiteren algebraischen Aufwand in ihrer empirischen Verteilung herangezogen werden.
Da die Untersuchung der beschriebenen Problemsituation sehr offen ist, ergeben sich meist viele weitere Probleme, die Anlass zur Fortführung der Reihe geben können. Einige hiervon sind:

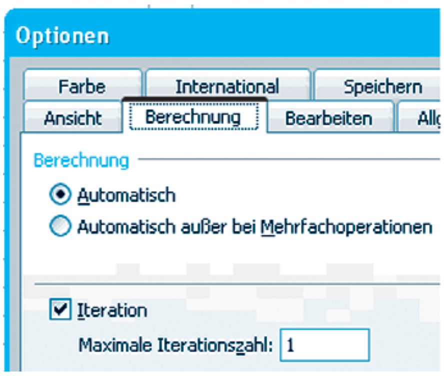
- Vergleich von empirischer und theoretischer Verteilung im Einzelfall: Qualitatives Verständnis des zentralen Grenzwertsatzes
- Entdecken der glockenartigen Verteilung und Erarbeitung der Gaußverteilung als Näherung
- Berechnung von theoretischen Wahrscheinlichkeiten
- Problem der statistischen Unabhängigkeit (z. B. Anzahl der 1, 2, 3, 4, 5, 6)

Technische Nachbemerkung

Will man ein Rechenergebnis, das abhängig von den Zufallswerten einer Tabelle ist, durch Druck der Taste F9 nicht verlieren, so kann man zu einem einfachen Trick greifen:

B	C	D	E	F
=MITTELWERT(A1:A10)		=WENN(D1=100;1;D1+1)	1	=WENN(E1=$D$1;$B$1;F1)
			=E1+1	=WENN(E2=$D$1;$B$1;F2)

- D1 ist hier eine selbstbezügliche Zelle, die zyklisch bis 100 hoch zählt.
- F1 wertet die Zielgröße $B$1 aus, wenn $D$1 auf 1 steht und behält seinen Wert sonst bei. F2 ist die Kopie der Zelle F1 und wertet die Zielgröße $B$1 aus, wenn $D$1 auf E2, also auf 2 steht usw.
- Damit es keine Fehlermeldung gibt, muss man im Optionsmenü (Extras – Optionen – Berechnung) Iterationen zulassen:



Auf diese Weise kann man bei jedem Tastendruck eine neue Zelle mit einer simulierten Zielgröße erzeugen und das Ergebnis schließlich deskriptiv auswerten.

Die EXCEL-Arbeitsblätter dieses Beitrags finden Sie bei den online-Angeboten zu diesem Heft unter: www.aulis.de/zeitschriften/PM → Ausgabe August 2005, online-Ergänzungen.

Literatur

Beck-Bornholdt, Hans-Peter/Dubben, Hans-Herrmann (1998): Der Hund, der Eier legt Erkennen von Fehlinformation durch Querdenken. Rowohlt 1998.
Blum, Werner, Kirsch, Arnold (1979): Zur Konzeption des Analysisunterrichts in Grundkursen, Der Mathematikunterricht 3/79, S. 6-24.
Borovcnik, Manfred (1992): Stochastik im Wechselspiel von Intuitionen und Mathematik. BI-Wissenschaftsverlag, Mannheim.
Eichelsbacher, Peter (2002): Mit RUNS den Zufall besser verstehen; Stochastik in der Schule, Band 22, Heft 1, S. 2-8.
Gigerenzer, Gerd (1993): Über den mechanischen Umgang mit statistischen Methoden. In E. Roth (Ed.), Sozialwissenschaftliche Methoden (3. Auflage), S. 607-618. München: Oldenbourg.

Timo Leuders,
Pädagogische Hochschule Freiburg,
leuders@ph-freiburg.de